Formelsamling

Lasse Herskind

Sidst opdateret: **21. oktober 2017**

Indhold

1 Lineær afbildning

1.1 Brug af afbildningsmatricen

Afbildningsmatricen.

$$eFe = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

1.1.1 Find et billed af en vektor

For at finde et billed af en vektor ved brug af afbildningsmatricen skal jeg blot finde matrix-vektorproduktet for disse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 24 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Er vektoren en del af kernen

For at undersøge om en vektor tilhører kernen laver vi blot et billede af denne, og giver denne 0 vil den tilhører kernen.

1.1.3 Find hele kernen

For at finde hele kernen skal jeg blot tage matrix-vektorproduktet og sætte lig 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Herefter skal vi blot gausse ned for at finde vores endelige resultat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeg kan herfra se at vi har et frit parameter. Og jeg kan så sætte 3 søjle lig 0. og indfører den frie parameter. Kernen vil så blive definere således:

$$ker f = span\{(2, -1, 1)\}$$

1.1.4 Dimensionssætningen

$$dim(V) = dim(ker f) + dim(f(V))$$

1.1.5 Bestem billedrummet

Vi benytter dimensionssætningen og ser at basisen for billedrummet skal bestå af 3-1=2 vektorer. Jeg benytter så de to lineært uafhængige som span for billedrummet:

$$f(\mathbb{R}^3) = span\{(1, 2, 1, -3), (3, 4, 1, -1)\}$$

1.1.6 Tilhører vektoren billedrummet?

For at undersøger om vektoren tilhører billedrummet, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, skal vi undersøge om der finden en løsning til det inhomogene ligningssystem. Kan denne ikke løses ligger vektoren uden for billedrummet.

$$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Dette løses med gaus-elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Jeg kan heraf se at det inmogene ligningsystem ikke har løsning da jeg får en nulrække som giver et resultat hvilket ikke er muligt. Denne vektor ligger altså ikke i billedrummet.

1.2 Basisskifte

1.2.1 Standardbase for $\mathbb{R}^3$

$$e = (e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

1.2.2 En anden base kunne være

$$b = (b_1, b_2, b_3) = ((1,1,0),(2,1,0),(0,0,1))$$

1.2.3 Basisskifte fra b til e

For at kunne finde en vektor opgivet i b's koordinater med hensyn til e skal vi gøre som følger. Vi skal regner matrix-vektorproduktet med hensyn til b.
Vi skal altså for at få vektoren i e koordinater regne $e\vec{v} = eMb.b\vec{v}$

$$b\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$eMb = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For så at finde v i forhold til basissen e skal jeg blot regnet matrixvektorproduktet.

$$e\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.2.4 Basisskifte fra e til b

Hvis vi modsat ovenstående eksempel skal beregne en vektor som skifter fra e til b. Benytter vi samme metode vi skal dog her istedet beregne for $bW = bMe.eW$

$$e\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$bMe = eMb^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dette betyder altså at $\vec{w} = -b_1 + b_2 - 3b_3$

1.2.5 Afbildningsmatrix med basisskifte

Der er givet to matricer

$$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$
$$c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

Vi har så en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder

$$f(a_1) = c_1 - 2c_2$$
$$f(a_2) = c_1 + c_2$$
$$f(a_3) = 3c_2$$

For at opstille afbildningsmatricen med hensyn til a og c skal jeg blot opskrive formlerne i en matrice.

$$cFa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hertil har vi så

$$\vec{x} = -a_1 + 2a_2 + a_3$$

Jeg finder nu x med c-koordinater med at finde matrixproduktet mellem afbildningsmatrixen og xvektoren med a-koordinater.

$$b\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Altså vil x med c koodinater være $f(x) = c_1 + 7c_2$

1.2.6 Undersøg om x tilhører kerne eller find kerne

Dette gøres på samme måde som tidligere. Den passenede afbildningsmatrice skal altså blot benyttes.
Eksempel 1. Hvis det er med hensyn til a og c vil dette være ved at finde matrixvektorproduktet med $cFa.a\vec{x}$ Er dette nul vil vi have en x som tilhører kernen.
Eksempel 2. Hvis det igen er med hensyn til a og c, og vi skal finde kernen og ikke blot om noget tilhører kernen, så skal vi blot løse det homogene ligningsystem $cFa.a\vec{x} = c\vec{0}$ hvilket vil gøres præcis som tidligere.

1.2.7 Løs den lineære ligning

Givet $b = 2c_1 - c_2$. Løs den lineære ligning $f(x) = b$
For at løse denne lineære ligning skal jeg løse det inhomogeneligningssytem $cFa \cdot a\vec{x} = c\vec{b}$

$$c\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$cFa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Denne reduceres nu til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Jeg skirver nu herfra a$\vec{x}$ op på parameterfremstilling.

$$a\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

1.3 Egenværdiproblemet

1.3.1 Karakteriske polynomium

Givet en matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

For at kunne beregne dette skal vi gøre brug af λ (proportionalitetsfaktoren) og enhedsmatricen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Denne nu fremkomne matrice skal vi så trække fra vores første matrice altså får vi dermed

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

af denne matrice opstiller vi så beregning af determinanten. Det er denne som kaldes det karakteriske polynomium.

$$(2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - (-1\cdot 2) = 10 - 6\lambda + \lambda^2$$

I reglen bruger vi dog betegnelsen $P_A(\lambda)$, altså vil vi skrive

$$P_a(\lambda) = 10 - 6\lambda + \lambda^2$$

1.3.2 Egenværdier

Egenværdier vil være de værdier vi får ud af det karakteriske polynomium når vi løser dette.

1.3.3 Algebraisk multiplicitet

Den algebraiske multiplicitet fortæller hvor mange gange hver egenværdi indgår.

1.3.4 Geometrisk multiplicitet

Den geometriske multiplicitet fortæller noget om antallet af egenvektorer for den pågældende egenværdi. Det skal her huskes at:

$$1 \le gm(\lambda) \le am(\lambda) \le 1$$

1.3.5 Egenrum

Et egenrum minder meget om det vi kalder en basis. Det har dog den forskel at egenrummet findes på baggrund af egenværdierne.

1.3.6 Eksempel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Som før benytter vi enhedsmatricen og λ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

Vi bruger nu **Maple** for nemheden skyld

$$a{:=}Determinant((1))$$

$$> a := -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 \tag{2}$$

$$solve((2), \lambda) = 2, 3, 3 \tag{3}$$

$$ReducedRowEchelonForm\left(\begin{bmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ 2 & 2-2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Af (4) opskriver vi parameterfremstillingen for egenvektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Herfra kan vi så skrive egenrummet op $E_2 = span\{(-1, 1, 0)\}$ (5)

$$am(2) = 1 \;\&\; am(3) = 2 \tag{6}$$

I eksemplet er her blot regnet for løsningen med $\lambda = 2$ fremgangsmåden vil være identisk for $\lambda = 3$

	Hvor ses dette i eksemplet
Karaktieriske polynomium	(2)
Karakteriske matrix	(4)
Egenværdier	(3)
Algebraisk multiplicitet	(6)
Egenrum	(5)

1.3.7 Egenvektor

En egenvektor er en vektor som når den afbildes gennem vil lande i nulvektoren. Det kan altså siges at være en slags "kerne"for egenrummet. For at være en egenvektor skal den altså overholde:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \neq 0$$

$$det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

1.4 Diagonalisering

$$\mathbf{A}.\mathbf{V} = \mathbf{V}.\mathbf{D}$$
$$\mathbf{V}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{V} = \mathbf{D}$$

A er her diaginaliseret gennem similærtransformation.
Ved at benytte egenvektorer som en basis vil vi kunne bruge **D** som afbildningsmatrice ${}_vF_v$

Kravet herfra er at vi kan benytte egenvektorerne som basis. Dette kræver at vi har egenvektorer nok. Dette har vi hvis

- Hvis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ vil dette være tilfældet
- **A** har n forskellige egenvektorer

Det går dog med sikkerhed galt når $\mathbf{gm}(\lambda) < \mathbf{am}(\lambda)$

1.4.1 Similære matricer

Definition:
To matricer, **A,B** kaldes similære hvis der findes en regulær matrix, **V**, således at $\mathbf{V}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{V} = \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{V}.\mathbf{B}.\mathbf{V}^{-1}$
Simiære matricer har samme:

- karakteristiske polynomium
- egenvektor
- determinant
- spor

    spor = summen af diagonalmatricen

$$\begin{aligned} det\left(\mathbf{A}\right) &= det\left(\mathbf{B}\right) \\ det\left(\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{V}.\mathbf{B}.\mathbf{V}^{-1}\right) &= det\left(\mathbf{V}\right) det\left(\mathbf{B}\right) det\left(\mathbf{V}^{-1}\right) \\ = det(\mathbf{V})det(\mathbf{V}^{-1})det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{V}.\mathbf{V}^{-1}) \cdot det(\mathbf{B}) &= det(\mathbf{B}) \\ P_a(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= det(\mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^{-1} - \lambda\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} \\ &= det(\mathbf{V} - (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}^{-1} \\ &= det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = P_b(\lambda) \end{aligned}$$

1.4.2 Hvad kan vi bruge dette til?

Eksempel

$$\mathbf{A}^{11} = (\mathbf{V}.\mathbf{D}.\mathbf{V}^{-1})(\mathbf{V}.\mathbf{D}.\mathbf{V}^{-1})\cdots = \mathbf{V}.\mathbf{D}^{11}.\mathbf{V}^{-1}$$

2 Diffirentialligninger

2.1 Lidt regler når der differentieres

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$f'(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

2.2 Lineær 1. ordens

Eksempel på differentialligning

$$x'(t) + p(t) \cdot x(t) = q(t)$$

Ved differentialligninger er p,q kendte funktioner, $p, q \in \mathbb{C}(I), I \subseteq \mathbb{R}$
Vi forsøger så at finde den ukendte funktion x(t), $x \in \mathbb{C}'(I)$. Derfor indfører vi

$$f : C^1(I) \to C^0(I)$$
$$f(x(t)) = x'(t) + p(t) \cdot x(t) \leftrightarrow f(x(t)) = q(t)$$

Vi viser at differentiallingningen er linær præcis som som vi viser at andre ligninger er lineære.
Eksempel

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = 4t^2, \quad t > 0$$

vi ser fra (**2.2**) at vi kan opskrive denne som

$$p(t) = -\frac{1}{t} \quad q(t) = 4t^2$$
$$P(t) = \int p(t)dt, \quad e^{P(t)}$$
$$e^{P(t)}x'(t) + e^{P(t)}p(t)x(t) = e^{P(t)}q(t)$$
$$\left(e^{P(t)}x(t)\right)' = e^{P(t)}p(t)x(t) + e^{P(t)}x'(t)$$
$$\left(e^{P(t)}x(t)\right)' = e^{P(t)}q(t)$$
$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}dt + c, \quad c \in \mathbb{L}$$
$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt + ce^{-P(t)} \quad c \in \mathbb{L}$$

Vi ser heraf at:

$$x_{partikulær} = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt$$
$$L_{homogen} = ce^{-P(t)} = span\left\{e^{-P(t)}\right\}$$

2.2.1 Panserformlen

Denne kan benyttes når ligningen er på formen

$$q(t) = y' + p \cdot y$$
$$q(t) = y'(t) + p(t) \cdot y(t)$$

Løsningen vil så være: (Udledning ses omkring (**2.2**))

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt + ce^{-P(t)} \quad c \in \mathbb{L}$$

$\downarrow$ Forkortes $\downarrow$

$$x(t) = e^{-Pt}\left(\int e^{Pt} \cdot q(t) + c\right) \quad c \in \mathbb{L}$$

Her skal huskes regnereglen:

$$\int p(t) \cdot q(t) dx = P(t) \cdot q(t) - \int P(t) \cdot q'(t) dx$$

2.3 Superpositionsprincippet

$$f(x(t)) = x'(t) + p(t)x(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$
$$\text{Find } x_1(t) \text{ så } f(x_1(t)) = q_1(t) \text{ gør dette op til } x_3$$
$$\Sigma x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$
$$\text{Dermed vil:}$$
$$f(x(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t)) + f(x_3(t)) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

Eksempel

$$x'(t) - 2x(t) = 2t^2 - 1 + cos(t) + 2e^{3t}$$
$$P(t) = -2t$$
$$L_{hom} = ce^{2t}$$

Herfra kan vi så grundet superpositionsprincippet dele denne op i tre led, nemlig

$$2t^2 - 1 \qquad cos(t) \qquad 2e^{3t}$$

For at løse den første laver vi et gæt på polynomiumsform

$$x(t) = at^2 + bt + c$$
$$(x(t) = at^2 + bt + c)' - 2(x(t) = at^2 + bt + c) = 2t^2 - 1$$
$$2at + b - 2at^2 - 2bt - 2 = 2t^2 - 1$$
$$\text{Vi kan så løse a, b og c}$$
$$-2a = 2 \quad 2a - 2b = 0 \quad b - 2c - 1$$
$$a = -1 \quad b = -1 \quad c = 0$$
$$x_1 \text{ kan altså beskrives:}$$
$$x_1(t) = -t^2 - t$$

For $cos(t)$

$$x(t) = \alpha cos(t) + \beta sin(t)$$
$$(\alpha cos(t) + \beta sin(t))' - 2(\alpha cos(t) + \beta sin(t)) = cos(t)$$
$$-\alpha sin(t) + \beta cos(t) - 2\alpha cos(t) - 2\beta sin(t) = cos(t)$$
$$b - 2a = 1 \quad 2b - a = 0$$
$$a = -\frac{2}{5} \quad b = \frac{1}{5}$$
$$x_2(t) = -\frac{2}{5}cos(t) + \frac{1}{5}sin(t)$$

For $2e^{3t}$

$$x(t) = ae^{3t}$$
$$(ae^{3t})' - (ae^{3t}) = 2e^{3t}$$
$$3ae^{3t} - 2ae^{3t} = 2e^{3t}$$
$$ae^{3t} = 2e^{3t}$$
$$a = 2$$
$$x_3 = 2e^{3t}$$

Den fuldstændige løsning

$$x(t) = -t^2 - t - \frac{2}{5}cos(t) + \frac{1}{5}sin(t) + 2e^{3t} + ce^{2t} \quad c \in \mathbb{R}$$

2.4 Koblede differentialligninger

2.5 Lineære systemer af diff. ligninger

Modelsituation

$$\begin{array}{c} x_1'(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2-(t) = \gamma x_1(t) + \delta x_2(t) \end{array} \quad , \quad t \in I \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Systemmatricen kan så opskrives} A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = \mathbf{A}x(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2.5.1 Eksempel 1

Antag at $\mathbf{A}$ har 2 lineært uafhængige egenvektorer, $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, med reelle egenværdier, λ_1, λ_2. Så kan vi lave matricen

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{regulær}$$
$$V^-1AV = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

For at løse denne skifter vi variabel.

$$\vec{x}(t) = \mathbf{V}y(t)$$
$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$
$$\downarrow (\mathbf{2.5}) \downarrow$$
$$(\mathbf{V}\vec{y}(t))' = \mathbf{A}(\mathbf{V}\vec{y}(t))y'(t) = \mathbf{AV}y(t)$$
$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{r} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{array}$$
$$\text{Da } x(t) = Vy(t) \text{ fås:}$$
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_2 \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{L}$$

2.5.2 Eksempel 2, næ

2.5.3 Eksempel 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \quad \lambda = 14, am(14) = 2, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, gm(14) = 1$$

$$V^-1AD \neq D$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Højre søjle kan frit vælges, dog så v er regulær}$$

$$V^-1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu gøre som fra eksempel 1

$$x(t) = \mathbf{V}y(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2't) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Denne løser vi så fra bunden af en rund som endnu er uvis

$$y_2'(t) = 14y_2(t)$$

$$y_2(t) = c_2e^{14t} \quad c_2 \in \mathbb{L}$$

$$y_1'(t) = 14y_1(t) + 2y_2(t) \rightarrow y_1'(t) = 14y_1(t) + 2c_2e^{14t}$$

$$y_1'(t) - 14y_1(t) = 2c_2e^{14t}$$

$$p(t) = -14 \rightarrow P(t) = -14t$$

$$q(t) = 2c_2e^{14t}$$

$$y_1(t) = e^{14t} \int e^{-14t} 2_c 2e^{14t} dt + c_1e^{14t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{L}$$

$$y_1(t) = 2c_2te^{14t} + c_1e^{14t}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2c_2t + c_1)e^{14t} \\ c_2e^{14t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = Vy(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2c_2t + c_1)e^{14t} \\ c_2e^{14t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (2c_2t + c_1)e^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.6 Lineære højere ordens diff ligninger med konstante koefficienter

n-te ordens ligning med konstante koefficienter.

$$\overset{(n)}{x}(t) + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) \tag{7}$$
$$f(x(t)) = q(t)$$
$$\text{f lineær } f : C^n(I) \to C^0(I) \quad f : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$$

Løsningsmængden har så stukturen

$$\mathbb{L} = x_0 + \mathbb{L}_{hom}$$
$$x(t) = x_0(t) + c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t) + \cdots + c_n l_n(t)$$
$$f(x_0(t)) = q(t)$$

Antag at $n = 3$ (for notation, følgende gælder altid)

$$x'''(t) + a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$\text{Vi bestemmer nu } \mathbb{L}_{hom}$$
$$x'''(t) = -a_2 x''(t) - a_1 x'(t) - a_0 x(t)$$
$$\text{Indføre nu en vektor}$$
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} x_1(t) = x_(t) \\ x_2(t) = x'(t) \\ x_3(t) = x''(t) \end{matrix}\right\} x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ x'''(t) \end{bmatrix}$$
$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t)$$
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ x'''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$
$$\text{Generel løsning:}$$
$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 \vec{+} c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v_2} + c_3 \cdot e^{\lambda_3 t} \cdot \vec{v_3}$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 \text{ er egenværdier}$$
$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \text{ er egenvektorer}$$
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} \vec{v_{11}} \\ \vec{v_{21}} \\ \vec{v_{31}} \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} \vec{v_{12}} \\ \vec{v_{22}} \\ \vec{v_{32}} \end{bmatrix} + c_3 \cdot e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} \vec{v_{13}} \\ \vec{v_{23}} \\ \vec{v_{33}} \end{bmatrix}$$
$$x(t) = x_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + k_3 e^{\lambda_3 t} \quad k \in \mathbb{L}$$

Generelt vil løsningen til sådan en ligning have $\mathbb{L}_{hom}$ som:

$$k_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + k_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n \cdot e^{\lambda_n t}$$

2.6.1 Hvordan gør vi

Vi ved at formlen (7) har en løsning af formen $e^{\lambda t}$. Indsæt derfor i formel.

$$(e^{\lambda t})^n + a_{n-1}(e^{\lambda t})^{n-1} + a_{n-2}(e^{\lambda t})^{n-2} + \cdots + a_0(e^{\lambda t}) = 0$$
$$\lambda^n(e^{\lambda t})^n + \lambda^{n-1}a_{n-1}(e^{\lambda t})^{n-1} + \lambda a_{n-2}(e^{\lambda t})^{n-2} + \cdots + a_0(e^{\lambda t}) = 0$$
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \text{Karakterisk ligning}$$

2.7 Lineære 2. ordens diff ligninger

2.7.1 Homogene ligninger

Generelt:

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad (\lambda_1) \tag{8}$$
$$\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \quad (\lambda_2)$$

Find løsning fra homogen ligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

Vi opstiller karakterligningen

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0}}{2}$$

Herefter kan den fuldstændige løsningsmængde opskrives som:

$$\lambda \in \mathbb{R}$$
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} t \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$
$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} cos(\beta_1 t) + c_2 e^{\alpha_2 t} sin(\beta_2 t) \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Find homogen ligning fra løsning

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} sin(\beta t) \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Opstille karakterligningen ved brug af (8):

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{12}$$

Herfra kan a_1 og a_0 blot aflæses og den homogene ligning opskrives:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \quad \in \mathbb{R}$$

2.7.2 Tips 'n tricks

Fås en fuldstændig løsning til det inhomogene ligningssystem kan c_1 og c_2 sættes nul og den partikulære løsnings står tilbage.
Vi kan så grundet struktursætningen:

$$\mathbb{L} = x_0 + \mathbb{L}_{hom}$$

hurtigt og nemt finde frem til den homogene løsning.

2.7.3 Eksempler

Eksempel 1 (9)

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$
$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$$
$$k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Eksempel 2 (11)

$$x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm i6}{2} \begin{cases} 1 + i3 \\ 1 - i3 \end{cases}$$
$$Ae^t cos(3t) + Be^t sin(3t) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Eksempel 3 (10)

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1(k_1 t + k_0)e^t \quad k_1, k_0 \in \mathbb{R}$$

Eksempel 4 (12)

$$x(t) = c_1 e^{2t} cos(7t) + c_2 e^{2t} sin(7t) \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\lambda = 2 \pm i7$$
$$(\lambda - 2 - i7)(\lambda - 2 + i7) = (\lambda - 2)^2 - (i7)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 49$$
$$x''(t) - 4x'(t) + 53x(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Eksempel 5 (gættemetoden)

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 3t + 1 + e^t$$
$$x_{gæt} = at + b, \text{ indsæt}$$
$$(at + b)'' + 4(at + b)' + 3(at + b) = 3t + 1$$
$$4a + 3at + 3b = 3t + 1$$
$$3a = 3 \to a = 1 \quad 4a + 3b = 1 \quad 3b = -3 \to b = -1$$
$$x_{gæt} = t - 1 \quad x_{gæt} = Ae^t, \text{ indsæt}$$
$$(Ae^t)'' + 4(Ae^t)' + 3Ae^t = e^t$$
$$Ae^t + 4Ae^t + 3Ae^t = e^t$$
$$8A = 1 \quad a = \frac{1}{8}$$
$$x_{gæt} = \frac{1}{8}e^t$$

Fuldstændig løsning

$$x(t) = t - 1 + \frac{1}{8}e^t + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

2.8 Den komplekse gættemetode

$$
\begin{gathered}
x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = e^t cos(2t) \\
\text{Gæt:} Ae^{(1+i2)t} \quad A \in \mathbb{C} \quad \text{indsæt} \\
(Ae^{(1+i2)t})'' + 4(Ae^{(1+i2)t})' + 3(Ae^{(1+i2)t}) = e^{(1+i2)t} \\
(1+i2)^2 Ae^{(1+i2)t} + (1+i2)4(Ae^{(1+i2)t}) + 3(Ae^{(1+i2)t}) = e^{(1+i2)t} \qquad (13) \\
\downarrow \frac{(13)}{e^{(1+i2)t}} \\
A(1-4+4i) + 4A + 8Ai + 3A = 1 \\
-3A + 4Ai + 4A + 8Ai + 3A = 1 \\
4A + 12Ai = 1 \rightarrow A(4+12i) \\
A = \frac{1}{4+12i} \cdot \frac{4-12i}{4-12i} = \frac{4-12i}{4^2+12^2} = \frac{4-12i}{160} \\
x_{gæt} = (\frac{4-12i}{160})e^t(cos(2t) + isin(2t)) \\
Re(x_{gæt}) = \frac{4}{160}e^t cos(2t) + \frac{12}{160}e^t sin(2t) \\
x(t) = \frac{4}{160}e^t cos(2t) + \frac{12}{16}e^t sin(2t) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \quad c_2, c_1 \in \mathbb{R}
\end{gathered}
$$

FORÅRSSEMESTER

3 Taylor

3.1 Løvejagt 1

3.2 Glatte funktioner

Funktioner som ser "glatte"ud

$$f : I \to \mathbb{R}$$
$$f \in C^{\infty}(I)$$

Eksempler på glatte funktioner er polynomier samt. $e^x, sin(x), cos(x) \cdots$

3.3 Taylorpolynomier

3.3.1 Tangentligning / Taylorpolynomiet af orden 1.

Tangent gennem $(x_0, f(x_0)$ også kaldet Taylorpolynomiet af orden 1. med udviklingspunkt x_0 Tangentligning:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylorpolynomium af orden 1 med udviklingsunkt x_0

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$P_{1,x_0}(x_0) = f(x_0)$$
$$P'_{1,x_0}(x_0) = f'(x_0)$$

3.3.2 Taylorpolynomium af orden 2

Taylorpolynomium af orden 2 med udviklingspunkt i x_0

$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$
$$P_{2,x_0}(x_0) = f(x_0)$$
$$P'_{2,x_0}(x_0) = f'(x_0)$$
$$P''_{2,x_0}(x) = 2a$$
$$P''_{2,x_0}(x_0) = 2a = f''(x_0)$$
$$a = \frac{f''(x_0)}{2}$$
$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

3.3.3 Taylorpolynomium af orden n

Taylorpolynomium af orden n med udviklingspunkt x_0

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Eksempler: For $e^x, sin(x), cos(x)$ Orden 4.

$$f(x) = e^x \quad x_0 = 0$$
$$P_{4,x_0}(x) = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (x - 0)^3 + \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot (x - 0)^4$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

I Maple kan dette gøres:

$$mtaylor(f(x), udviklingspunkt, n + 1)$$
$$mtaylor(f(x), x = 0, n + 1)$$

3.4 Taylors formel

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

Restfunktionen:

$$R_{n,x_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \\ x \leq \xi \leq x_0}{\epsilon(x-x_0)(x-x_0)^n} & \begin{matrix} \epsilon(x-x_0) = 0 \text{ for } x = x_0 \\ \epsilon(x-x_0) \to 0 \text{ for } x \to 0 \end{matrix} \end{cases}$$

I Maple

$$\epsilon(x-x_0)(x-x_n n)^n = O((x-x_0)^{n+1})$$

3.5 Taylor's grænseformel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + \epsilon_f \cdot (x-x_0)^n \\ f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{f'_x(x_0,y_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f'_y(x_0,y_0)}{1!} \cdot (y-y_0) + \frac{f''_{xx}(x_0,y_0)}{2!} \cdot (x-x_0) \\ &+ \frac{f''_{yy}(x_0,y_0)}{2!} \cdot (y-y_0) + 2 \cdot \frac{f''_{xy}(x_0,y_0)}{2!} \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) \\ &+ \cdots + \epsilon_f \cdot ((x-x_0) \cdot (y-y_0))^n \end{aligned}$$

Det resultat som vi får herfra kan så siges at være grænseværdien. De tilfælde hvor det er tydeligst er $x \to 0$ hvor vi så ved at sætte $x = 0$ direkte kan aflæse grænseværdien.

For at gøre dette i maple bruges blot kommandoen:

$$mtaylor(f(x), udviklingspunkt, n+1)$$

4 Funktioner af 2. variable

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad f : A \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

4.1 Mængder i $\mathbb{R}^2$

Åbne kugle / Åben cirkelskive, radius r, centrum i (x_0, y_0)

$$B_r(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \qquad r > 0$$

4.2 Indre punkt

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{Et punkt } (x_0,y_0) \text{ i A}$$
$$\text{er et indre punkt, hvis der findes en kugle } B_r(x_0,y_0) \subset A$$

Hvis en mængde kun indeholder indre punkter er den **åben**.
De indre punkter i A kaldes A°, det indre af A

4.3 Randpunkt

Et randpunkt er et punkt i som både indeholder punkter inden- og udenfor A.
Randpunkterne for A kaldes ∂A, randen af A.
En mængde der indeholder alle sine randpunkter er **afsluttet**
$\bar{A} = A \cup \partial A$

4.4 Begrænset mængde

En mængde A er **begrænset** hvis der findes en kugle så

$$A \subset B_r(x_0,y_0)$$

Dvs. at den er **ubegrænset** hvis det er tilladt for en af størrelserne at gå mod ∞

4.5 Kontinuert

f er kontinuert i (x_0, y_0) hvis

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \epsilon(x-x_0, y-y_0) \qquad \begin{array}{l} \epsilon(0,0) = 0 \\ \epsilon(x,y) \to 0 \text{ for } (x,y) \to 0 \end{array}$$

4.6 Partiel afledning

Lad (x_0, y_0) være et indre punkt i $\mathbb{R}^2$. f siges at være differentiabel i (x_0, y_0) hvis det findes $a, b \in \mathbb{R}$ så

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \epsilon(x-x_0, y-y_0) - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Så kaldes a og b de partielle afledede:

$$a = f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$b = f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

4.7 Tangentplanen

Ligning:

$$P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$P_{2,(x_0,y_0)}(x,y) = P_{1,(x_0,y_0)}(x,y) + \frac{f''_{xx}(x_0,y_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f''_{yy}(x_0,y_0)}{2!}\cdot(y-y_0)^2 + 2\cdot\frac{f''_{xy}(x_0,y_0)}{2!}\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)$$

Parameterfremstilling:

$$T_{(x_0,y_0)}(f) : T(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x_0,y_0) \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

4.8 Niveaukurver

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\text{Niveaukurven } K_c$$
$$K_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = c\right\}$$

Eksempel

$$f(x,y) = x + y$$
$$K_c : x + y = c$$
$$y = c - x$$

Eksempel 2

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$c < 0 \quad K_c = \emptyset$$
$$c = 0 \quad x^2 + y^2 = 0 \quad K_0 = \{(0,0)\}$$
$$c > 0 \quad x^2 + y^2 = c \quad \text{Cirkel, centrum (0,0) radius } \sqrt{c}$$

Eksempel 3

$$S_0 = 1380 \quad \alpha = 0.3 \quad f_0 = 0.77 \quad \sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}$$
$$f(x,y,z) = \left(\frac{(1-x)y}{4\left(1-\frac{z}{2}\right)\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$c = f(\alpha, S_0, f_0) = 288.4793562$$
$$K_c = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = c\right\}$$

Hvis vi herfra ønsker at finde tangentplanen for niveaukurven/fladen, i dette punkt, kan vi isolere i udtrykket

$$f(x,y,z) = c \Rightarrow \left(\frac{(1-x)y}{4\left(1-\frac{z}{2}\right)\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = c$$
$$z = \frac{176366842992155551382276983949346883704 1}{1385124963109298838356410848892596966720000} y \cdot x - \frac{1763668429921555513822769839493468837041}{1385124963109298838356410848892596966720000} \cdot y + 2$$

Og herefter benytte taylorpolynomiet til at finde tangentligningen

$$P_{1,(S_0,\alpha)}(x,y) = 1.4728571431.757142855 \cdot x - 0.0008913043468 \cdot y$$

4.9 Parametriserede kurver i $\mathbb{R}^2$

$$I: \text{ åbent interval}$$
$$\vec{r}: I \to \mathbb{R}^2$$
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$
$$\text{Regulære kurver: } (x'(t), y'(t)) \neq (0,0) \tag{14}$$

Eksempel

$$I =]0, 2\pi[$$
$$\vec{r}(t) = (cos(t), sin(t))$$

Grundet (14) kan vi ikke indsætte 0, vi indsætter derfor større end 0
og får dermed en jævn cirkelbevægelse

$$\vec{r}'(t) = (-sin(t), cos(t)) \quad \text{Hastigheden}$$
$$\| \vec{r}'(t) \| = \sqrt{(-sin(t))^2 + (cos(t))^2} \quad \text{Farten}$$

Specialtilfælde
Vi kan også opskrive en almindelige funktion og se at denne kan opskrives som en vektor.

$$f(x) \qquad r(t) = (t, f(t))$$
$$r'(t) = (1, f'(t)) \qquad | r'(t) | = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$$

Vi kan så antage at farten, udtrykker længden af kurven et stykke, t

4.10 Kædereglen

For 1-variabel

$$h(t) = f(g(t))$$
$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

For 2-variable, en parametriseret kurve

$$\begin{aligned} h(t) &= f(\vec{r}(t)), \quad t \in I \\ h &: I \to \mathbb{R} \\ h'(t) &= \triangledown f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) \\ &= (f'_x(x(t), y(t)), f'_y(x(t), y(t))) \bullet (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

Eksempel

$$f(x, y) = x^2 + xy^2$$
$$\vec{r}(t) = (cos(t), sin(t)) \quad I =]0, 2\pi[$$
$$h(t) = f(cos(t), sin(t)) = cos^2(t) + cos(t)sin^2(t)$$
$$\triangledown f(x, y) = (2x + y^2, 2xy)$$
$$\vec{r}'(t) = (-sin(t), cos(t))$$
$$\begin{aligned} h'(t) &= \triangledown f(cos(t), sin(t)) \bullet (-sin(t), cos(t)) \\ &= (2cos(t) + sin^2(t), 2cos(t)sin(t)) \bullet (-sin(t), cos(t)) \\ &= -2cos(t)sin(t) - sin^3(t) + 2cos^2(t)sin(t) \end{aligned}$$

4.11 Gradient

$$\triangledown f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y))$$

4.12 Retningsafledede

$$\vec{e} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 1 \quad \text{enhedsvektor}$$
$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 + t\alpha_1 \\ y_0 + t\alpha_2 \end{bmatrix}$$
$$h(t) = f(\vec{r}(t))$$
$$h'(t) = \bigtriangledown f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t)$$
$$\vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \vec{e}$$
$$h'(t) = \bigtriangledown f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t)$$
$$= \bigtriangledown f(\vec{r}(t)) \bullet \vec{e}$$
$$v = \text{vinkel i forhold til } \bigtriangledown f(\vec{r}(t))$$
$$\text{max findes ved } v = 0$$
$$\text{neutral for } v = \frac{\pi}{2}$$
$$\text{min for } v = \pi$$
$$\bigtriangledown f(x,y) = \vec{0} \text{ kaldes et stationært punkt}$$

Eksempel
Beregn den retningsafledede i $(1,2)$ i retningen $(3,4)$(vektor)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\bigtriangledown f(x,y) = (2x, 2y)$$
$$\bigtriangledown f(1,2) = (2,4)$$
$$\| (3,4) \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\vec{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$\bigtriangledown f(1,2) \bullet \vec{e} = (2,4) \bullet \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5}$$

Eksempel kan ses i Maple, under uge 2, storedag.

4.13 Kompakte sammenhængende mængder

En delmængde af $\mathbb{R}^n$ kaldes **kompakt**, hvis den er **afsluttet** og **begrænset**.

Eksempel på kompakte

$$[a,b] \quad \text{er kompakt}$$
$$[1,2] \cup [7,9] \quad \text{er kompakt}$$
$$\mathbb{R}^2 \quad \text{ikke kompakt, ubegrænset}$$

En delmængde af $\mathbb{R}^2$ kaldes **sammenhængende** hvis to vilkårlige punkter i denne kan forbindes med en kontinuert kurve der løber helt i mængden.

Eksempler på sammenhængende mængder

$$[a,b] \quad \text{er sammenhængende}$$
$$]a,b[\quad \text{er sammenhængende}$$

4.14 Ekstremværdisætningen

Lad $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Hvis A er **kompakt**, antager f, både minimum og maksimum på A.
Hvis A er både **kompakt** og **sammenhængende** vil værdimængden være:

$$Vm(f) = [min(f), max(f)]$$

4.15 Strategi til $Vm(f)$ (min og max) - Gode eksempler se ***EXF 2011 og 2013***

Lad $f : A \to \mathbb{R}$ og A være kompakt.

Hvad skal vi lede efter for af finde min og max?

- **Stationære punkter**
  Et stationært punkt er et punkt som overholder: $\triangledown f(x,y) = \vec{0}$
- **Randen**
  Randen undersøger vi ved at opstille en r-funktion. Som beskriver hvordan x og y opfører sig her, denne kan godt være afhængig af fx. t, som det ses ved cirkler.
  Denne r-funktion indsættes så i den oprindelige f(x,y), differentieres og løses til 0. Nu har du x og y, eller t, til toppunkterne.
  Husk! - Hvis du har en lige linje skal du holde en variabel fast og lade den anden løbe, dette kan gøres direkte i f(x,y).
- **Undtagelsespunkter (singulære punkter)**
  Dette vil oftest være hjørnerne af mængden, disse kan indsættes direkte i $f(x,y)$

  $\triangledown f$ findes ikke

4.15.1 Eksempel 1

Bestem værdimængden for $f(x,y) = x^2 + y^2$, defineret på $\triangle$.
$\triangle$ er en trekant, hvor hypotenysen, I, er $y = -x + 5$. "Bunden", II, løber fra -1 til 7 og "siden", III, fra -2 til 6.

Vi ved at $\triangle$ er kompakt og sammenhængende, dermed må $Vm(f) = [min(f), max(f)]$ ifølge Ekstremsværdisætningen.

Stationære punkter

$$\triangledown f(x,y) = (2x, 2y)$$
$$\triangledown f(x,y) = \vec{0} \leftrightarrow 2x = 0 \vee 2y = 0$$
$$(x,y) = (0,0)$$

Randen (uden hjørner)

$$I : y = -x + 5 \quad \phi_1(x) = f(x, -x + 5)$$

$$\begin{aligned}\phi_1 = f(x, -x+5) &= x^2 + (-x+5)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 10x + 25 \\ &= 2x^2 - 10x + 25 \qquad \text{for 1 ¡ x ¡ 7} \\ \phi_1'(x) &= 4x - 10 = 0 \\ x &= 2,5 \\ y &= -2,5 + 5 = 2,5 \\ (x, y) &= (2.5, 2.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}II : y &= -2 \quad -1 < x < 7 \\ \phi_2 = f(x, -2) &= x^2 + (-2)^2 \\ &= x^2 + 4 \\ \phi_2'(x) &= 2x = 0 \\ x &= 0 \\ (x, y) &= (0, -2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}III : x &= -1 \quad -2 < y < 6 \\ \phi_3 = f(-1, y) &= 1 + y^2 \\ \phi_3 &= 2y = 0 \\ y = 0(x, y) &= (-1, 0)\end{aligned}$$

Hjørnerne
Vi tager hjørnerne for trekanten og smider dem ind i funktionen. Da minimumspunktet må være nul skal vi kun finde maxpunktet

$$\begin{aligned}f(7, -2) &= 53 \\ Vm(f) &= [0, 53]\end{aligned}$$

4.15.2 Eksempel 2

Bestem værdimængden for $f(x, y) = 8 \cdot \sqrt{x^2 + 3y^3} - 5x - y^2$, defineret på mængden M bestemt ved $x^2 + 3y^2 \leq 4$

Stationære punkter
Vi leder efter de stationære punkter

$$\bigtriangledown f(x, y) = -\frac{24 \cdot y \cdot x}{(x^2 + 3y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Herfra får vi dog et problem da det ikke er muligt at løse, altså er det ingen stationære punkter at finde.

Randen
For at finde toppunkter på randen vil vi her have et noget anderledes tilfælde end 1, da vi her bliver nødt til at tage forbehold i cirklens definition og benytte $r(t)$

$$r(t) = \begin{bmatrix} 2cos(t) \\ 2\frac{sin(t)}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Vi indsætter så denne i forskriften f og sætter gradienten lig 0.

$$\begin{aligned}f(r(t)) &= 16\sqrt{cos(t)^2 + sin(t)^2} - 10cos(t) - \frac{4}{3}sin(t)^2 \\ \bigtriangledown f(r(t)) &= 10sin(t) - \frac{8}{3}cos(t)sin(t) \\ \bigtriangledown f(r(t)) &= 0 \Leftrightarrow arccos\left(\frac{15}{4}\right), 0\end{aligned}$$

Vi ser her at kun 0 ligger på randen, dog ved vi at det er en cirkel og vi kan derfor benytte foreskriften $\mathbb{Z}\pi$

$$r(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r(\pi) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi indsætter nu de to løsninger og ser hvilken som er maximum eller minimum.

$$f(2,0) = 7$$
$$f(-2,0) = 26$$

Undtagelsespunkter Vi undersøger hvor det ikke er muligt at differentiere og er lidt heldige at det er givet i en tidligere opgave at dette er 0,0. Vi indsætter og ser om dette skaber et nyt minimum eller maksimumspunkter

$$f(0,0) = 0$$

Vi ser altså at at vi har en værdimængde som er defineret således:

$$Vm(f) = [0, 26]$$

4.16 Ekstremumsundersøgelse 2-variabler(min og max)

4.16.1 1-variabel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^2$$

Lad x_0 være et stationært punkt

$$f'(x_0) = 0$$

Bestem arten af ekstremumspunktet

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = 0 + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^2 \\ f(x) - f(x_0) > 0 \quad x_0 \text{ lokalt min} \\ f(x) - f(x_0) < 0 \quad x_0 \text{ lokalt max} \\ f(x) - f(x_0) = 0 \quad x_0 \text{ vi ved intet} \end{aligned}$$

Konklusion:

$$\begin{aligned} f''(x_0) > 0 \quad x_0 \text{ lokalt min} \\ f''(x_0) < 0 \quad x_0 \text{ lokalt max} \\ f''(x_0) = 0 \quad x_0 \text{ ingen info} \end{aligned}$$

4.16.2 2-variable

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ + \frac{1}{2}f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \\ + f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \epsilon(x - x_0, y - y_0) \cdot d^2 \end{aligned}$$

Kompakt skrivemåde

$$\bigtriangledown f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

Hessematrice

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$P_{2,(x,y_0)} = f(x_0, y_0) + \bigtriangledown f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} Hf(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \text{lille fejl}$$

Da Hessematricen er **symmetrisk** kan iv lave et koordinatskifte

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

Hvor $\mathbf{Q}$ er en ortogonal matrix med normerede egenvektorer som søjler, hvorved

$$\Lambda = \mathbf{Q}^T \mathbf{Hf}(x_0, y_0)\mathbf{Q}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ er egenvektorer for } \mathbf{Hf}$$

Højresiden kan nu skrives som

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x1 - x_{10} & y_1 - y_{10} \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ y_1 - y_{10} \end{bmatrix} + \epsilon \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1(x_1 - x_{10})^2 + \lambda_2(y_1 - y_{10})^2) + \epsilon \end{aligned}$$

Konklusion:

$$\begin{aligned}\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 &\quad (x_0, y_0) \text{ lokalt minimum}\\ \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 &\quad (x_0, y_0) \text{ lokalt maximum}\\ \lambda_1\lambda_2 < 0 &\quad (x_0, y_0) \text{ sadelpunkt}\\ \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 &\quad \text{Vi ved ingenting}\end{aligned}$$

4.16.3 Eksempel

$$\begin{gathered} f(x,y) = 3x^3 + 4y^3 + 6xy^2 - 9x^2 \\ Vm(f) = \mathbb{R} \\ f'_x = 9x^2 + 6y^2 - 18x = 0 \\ f'_y = 12y^2 + 12xy = 0 \\ 12y(y+x) = 0 \rightarrow y = 0 \vee y = -x \end{gathered}$$

$y = 0$

$$\begin{gathered} 9x^2 - 18x = 0 \\ 9x(x-2) = 0 \\ x = 0 \vee x = 2 \end{gathered}$$

$y = -x$

$$\begin{gathered} 15x^2 - 18x = 0 \\ x(15x - 18) = 0 \\ x = 0 \vee x = \frac{6}{5} \end{gathered}$$

Arten

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 18x - 18 & 12y \\ 12y & 24y + 12x \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{egenværdier } -18, 0 \quad \text{Ingen info}$$

$$Hf(2,0) = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{egenværdier } 18, 24 \quad \text{Lokalt minimum}$$

$$Hf\left(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right) = \begin{bmatrix} 3,6 & -14,4 \\ -14,4 & -14,4 \end{bmatrix} \quad det\left(Hf\left(\frac{6}{4}, \frac{-6}{5}\right)\right) < 0 \quad \text{Sadelpunkt}$$

5 Symmetrisk matricer, lidt som tidligere

5.1 Skalarproduktet, (prik) i $\mathbb{R}^n$

Primært $n = 3$ og $n = 2$

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \mid a \mid \cdot \mid b \mid \cdot cos(v)$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$
$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mid \vec{a} \mid^2$$

Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$

$$\vec{a_b} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\mid \vec{b} \mid^2} \right) \vec{b}$$

Bemærk

$$\vec{a} - \vec{a_b} \perp \vec{b}$$

5.2 Ortogonalt - Ortonormalt

Et sæt er ortonromalt hvis det er ortogonale enhedsvektorer.
Eksempel
Ortogonalt sæt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Deler vi nu med længderne får vi et ortonormalt sæt

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5.2.1 Ortonomalbasis

Også kaldet O.N.B
Et ortonomalt sæt af n vektorer er en O.N.B for $\mathbb{R}^n$
Lille bevis
Vis at et ortogonalt sæt $v_1 \cdots v_n$ er lineært uafhængigt.

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{0} \leftrightarrow \lambda = 0$$
$$(\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}) \bullet \vec{v_1} = \vec{0} \bullet \vec{v_1}$$
$$\lambda_1 \vec{v_1} \bullet \vec{v_1} + 0 = \vec{0}$$
$$\lambda_1 \mid \vec{v_1} \mid^2 = 0$$
$$\lambda_1 = 0$$

Tips 'n tricks

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \cdots \alpha_n \vec{v_n}$$
$$\vec{x} \bullet \vec{v_1} = (\alpha_1 \vec{v_1}) \bullet \vec{v_1} = \alpha_1$$

5.3 Gram-Scmidt ortogonalisering

Dette finder en ortogonal basis, kan normaliseres for at få en ortonomal.
Lad $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ være lineært uafhængige.

$$\begin{aligned}
\vec{u_1} &= \frac{\vec{v_1}}{\mid \vec{v_1} \mid} \\
\vec{w_2} &= \vec{v_2} - (\vec{v_2} \bullet \vec{u_1})\, \vec{u_1} \\
\vec{u_2} &= \frac{\vec{w_2}}{\mid \vec{w_2} \mid} \\
\vec{w_3} &= \vec{v_3} - (\vec{v_3} \bullet \vec{u_1})\, \vec{u_1} - (\vec{v_3} \bullet \vec{u_2})\, \vec{u_2} \\
\vec{u_3} &= \frac{\vec{w_3}}{\mid \vec{w_3} \mid} \qquad = \vec{u_1} \times \vec{u_2}
\end{aligned}$$

5.4 Ortogonale matricer

En $n \cdot n$ matrix er ortogonal hvis $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{E}$, hvilket betyder at den transponerede er den inverse $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.
$\mathbf{Q}$ er ortogonal hvis dens søjler er en O.N.B for $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$det(\mathbf{Q}) = \pm 1 \quad \begin{cases} 1 & \text{Positiv ortogonal, positiv omløbsretning} \\ -1 & \text{Negativ ortogonal, negativ omløbsretning} \end{cases}$$

5.5 Symmetriske matricer

Spektralsætning
Lad $\mathbf{A}$ være en symmetrisk $n \cdot n$ matrix.

- $\mathbf{A}$ har n reelle egenværdier, regnet med multiplicitet
- $am(\lambda_1) = gm(\lambda_i), i = 1 \cdots n$
- Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er ortogonale
- Der findes en O.N.B for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorerne for $\mathbf{A}$
- Skriv O.N.B som søjler i en matrix $\mathbf{Q}$, som da er ortogonal
  Da gælder

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

$$(\mathbf{B}\vec{x}) \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet \left(\mathbf{B}^T \vec{y}\right)$$

5.6 Kvadratisk former

$$
\begin{aligned}
K &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\
K(x_1, x_2, x_3) &= ax_1^2 + bx_2^2 + c_x^2 + dx_1x_3 + ex_1x_2 + fx_2x_3 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{e}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \frac{e}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}
$$

A er symmetrisk, så findes en ortogonal matrix **Q**, bestående af normerede vektorer for **A** som søjler.

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{q_1} & \vec{q_2} & \vec{q_3} \\ | & | & | \end{bmatrix}
$$

og en diagonalmatrix $\mathbf{D}(\Lambda)$ (Lambda) med egenvektorerne i diagonalen.

$$
\mathbf{D} = \ \Lambda \ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}
$$

Rækkefølgen af λ svarer til søjlerne i **Q**. Dette medfører

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} \\
\Lambda &= \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}
\end{aligned}
$$

Et nyt koordinatsæt laves

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2} & \tilde{x_3} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T
$$

$$
\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2} & \tilde{x_3} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{x_1} & \tilde{x_2} & \tilde{x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1\tilde{x_1}^2 + \lambda_2\tilde{x_2}^2 + \lambda_3\tilde{x_3}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda_i > 0 \quad i = 1,2,3 \quad K \ \textbf{positiv} \text{ definit} \\
\lambda_i < 0 \quad i = 1,2,3 \quad K \ \textbf{negativ} \text{ definit} \\
\lambda_i \text{ forskellige fortegn} \quad i = 1,2,3 \quad K \text{ indefinit}
\end{gathered}
$$

5.6.1 Med en funktion

Eksempel

$$
f(x,y,z) = x^2 + 3 \cdot y^2 + z^2 - 8 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y \cdot z
$$

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{xy}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{xz}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.7 Parabler, ellipser og hyperbler

5.7.1 Parabler

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$
$$x - x_0 = a(y - y_0)^2$$

5.7.2 Ellipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

5.7.3 Hyperbel

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

5.8 Eksempel

5.8.1 K_0 niveaukurven

Bestem K_0(niveaukurven) for

$$p(x,y) = 11x^2 + 4y^2 - 24xy - 20x + 40y - 60$$

Vi sætter lig 0

$$p(x,y) = 0$$
$$p(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 60 = 0$$

$$\text{Egenværdier for } \mathbf{A}$$
$$\lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = -5$$
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= 0 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 40 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 60 \\
&= 20x_1^2 - 5y_1^2 + \begin{bmatrix} -20 & 40 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 60 \\
&= 20x_1^2 - 5y_1^2 - 16x_1 - 12y_1 - 24x_1 + 32y_1 - 60 \\
&= 20x_1^2 - 5y_1^2 - 40x_1 + 20y_1 - 60 \\
&= 20(x_1^2 - 2x_1) - 5(y_1^2 - 4y_1) - 60 \\
&= 20((x_1-1)^2 - 1) - 5((y_1-2)^2 - 4) - 60 \\
&= 20(x_1-1)^2 - 20 - 5(y_1-2)^2 + 20 - 60 \\
&= 20(x_1-1)^2 - 5(y_1-2)^2 - 60
\end{aligned}$$

$$20(x_1-1)^2 - 5(y_1-2)^2 = 60$$
$$\frac{(x_1-1)^2}{3} - \frac{(y_1-2)^2}{12} = 1$$
$$\text{Centrum i } (1,2) \quad \text{Halvakser } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{12} = 2\cdot\sqrt{3}$$
$$\text{Centrum i gamle koordinater}$$
$$C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.8.2 Parameterfremstilling symmetriakser

Centrum for det gamle system skal benyttes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C + t_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

6 Integraler

6.1 Riemann-integrale

Det integrale som du kender fra gym, det som bruges når vi har med kontinuerte funktioner at gøre

$$f : \mathbb{R}^{1,2,3} \to \mathbb{R}$$

6.1.1 1 Variabel

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Approximation ved venstresummer

$$n = \text{finhed} \qquad \delta_x = \frac{b-a}{n}$$
$$A = I\left(f, n, [a,b]\right) = f(a)\delta_x + f(a+\delta_x)\delta_x + \cdots + f(a+(n-1)\cdot\delta_x)\delta_x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(a+(k-1)\delta_x)\delta_x \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)dx$$

Integralregningens hovedsætning

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.1.2 2 Variabler

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Vi finder her volumen under kurven for intervallet

$$[a,b]\times[c,d] \qquad n = \text{finhed}$$
$$\delta_x = \frac{b-a}{n} \qquad \delta_y = \frac{d-c}{m}$$

Approximation ved ventresummer

$$V = II(f,n,m,[a,b]\times[c,d]) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\delta_x\delta_y \xrightarrow[\to\infty]{n,m} \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

6.2 Partiel integration

$$\int f(x)\cdot g(x)\ dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\ dx$$

6.3 Løsning ved substitution

I nogle tilfælde vil det være meget nemmere at benytte integration ved substitution fremfor større sammensatte sataner.

$$\int f(g(x))\ dx \qquad \frac{du}{dx} = g'(x) \to dx = \frac{du}{g'(x)}$$
$$\int \frac{f(u)}{g'(x)}\ du$$

6.3.1 Eksempel

$$\int t\cdot\sqrt{t^2+1}\;dt \quad \xrightarrow[Indføres]{u=t^2+1} \quad \int t\cdot\sqrt{u}\;dt$$
$$\frac{du}{dt}=2t \quad \xrightarrow[Isoleres]{dt} \quad \frac{du}{2\cdot t}=dt$$
$$\int\frac{t\cdot\sqrt{u}}{2\cdot t}\;du=\int\frac{\sqrt{u}}{2}\;du$$
$$\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}} \xrightarrow[Indsættes]{u=t^2+1} \frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

6.4 Kurveintegrale

Se tilbage på parametriserede kurver hvis du har glemt alt.

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))\quad t\in I=[a,b]$$
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$\mid\vec{r'}(t)\mid=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\quad \text{Jacobifunktion}$$
$$K_{\vec{r}}=\int_a^b f(\vec{r}(t))\cdot\mid\vec{r'}(t)\mid dt\qquad\text{Husk at du får opgivet f}$$

Kurvelængde, hvis f=1

$$L_{\vec{r}}=\int_a^b\mid\vec{r'}(t)\mid dt$$

6.5 Planintegrale

Dette er lidt som en parametriseret kurve, bare med en plan.
Forestil dig noget der ligner en bakterie i xy-planen, et område. Vi vil nu beskrive dette område, dette er med en parametrisering med to variable, de vil her hedde u og v.

$$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v))\quad u\in[a,b],v\in[c,d]$$
$$\vec{r}(u_0,v_0)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))$$
$$A=\mid\hat{\vec{r}'_u}\bullet\vec{r'}_v=\mid\begin{bmatrix}-y'_u\\x'_u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_v\\y'_v\end{bmatrix}\mid$$
$$=\mid det\begin{bmatrix}\vec{r'}_u & \vec{r'}_v\end{bmatrix}\mid=\text{Jacobi}/J_{\vec{r}}(u,v)$$
$$f:P_{\vec{r}}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$\int_{P_{\vec{r}}}f d\mu=\int_c^d\int_a^b f(\vec{r}(u,v))\cdot J_{\vec{r}}(u,v)dudv$$
$$f=1\ \text{arealet}$$

6.5.1 Eksempler på parametriseringer

Eksempel 1

$$A\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$$
$$\vec{r}(u,v)=(u,v)\quad u\in[a,b],v\in[c,d]$$

Eksempel 2

$$A\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b,0\le y\le 1\right\}$$
$$\vec{r}(u,v)=(u,c+v(d-c))\quad u\in[a,b],v\in[0,1]$$

Eksempel 3
Nu med funktioner som akser, vi benytter f som øvre grænse, og g som nedre.

$$\vec{r}(u,v) = (u, g(u) + v\,(f(u) - g(u))) \quad u \in [a,b], v \in [0,1]$$

Eksempel 4, cirkelskive

$$\vec{r}(u,v) = (u \cdot cos(v), u \cdot sin(v)) \qquad u \in [0,R], v \in [0,2\pi] \quad R = \text{Radius}$$

6.5.2 Eksemplet vi alle har ventet på

Cirkelskive

$$\begin{gathered} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \vec{r}(u,v) = (u \cdot cos(v), u \cdot sin(v)) \qquad u \in [0,R], v \in [0,2\pi] \quad R = \text{Radius} \\ J_{\vec{r}}(u,v) = \mid det \begin{bmatrix} \vec{r'}_u & \vec{r'}_v \end{bmatrix} \mid = \mid det \begin{bmatrix} cos(v) & -u \cdot sin(v) \\ sin(v) & u \cdot cos(v) \end{bmatrix} \mid \\ = \mid u \cdot cos^2(v) + u \cdot sin^2(v) \mid = \mid u \mid = u \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\left((u \cdot cos^2(v))^2 + (u \cdot sin^2(v))^2 \right) u \right) dudv \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R u^3 dudv = \frac{\pi}{2} R^4 \end{gathered}$$

Eksempel 2

$$\begin{gathered} f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \\ A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \right\} \\ \vec{r}(u,v) = \left(u, u^2 + v(u - u^2) \right) \quad u \in [0,1], v \in [0,1] \\ J_{\vec{r}}(u,v) = \mid det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2u + v - 2uv & u - u^2 \end{bmatrix} \mid = \mid u - u^2 \mid \\ A = \int_{P_{\vec{r}}} 1 d\mu = \int_0^1 \int_0^1 \left(u - u^2 \right) dudv \\ = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 dv = \frac{1}{6} \end{gathered}$$

6.6 Massemidtpunkt

Massemidtpunktet for et plant område

$$\begin{gathered} f(x,y) \quad \text{Massetætheden} \\ M = \int_{P_{\vec{r}}} f d\mu \qquad \text{Samlede masse} \\ (x_{cm}, y_{cm}) = \left(\frac{1}{M} \int_{P_{\vec{r}}} (x(u,v) \cdot f(x,y))\, d\mu, \frac{1}{M} \int_{P_{\vec{r}}} (y(u,v) \cdot f(x,y))\, d\mu \right) \\ = \frac{1}{M} \int_c^d \int_a^b ((x(u,v), y(u,v))\, f(x(u,v), y(u,v)) J_{\vec{r}}(u,v)) dudv \end{gathered}$$

Gode eksempler kan findes i uge 5 lilledag.

6.7 Fladeintegrale

En flade har ingen tykkelse. En flade er et 2-d objekt i $\mathbb{R}^3$. Et plant område er et tilfælde af en flade med $z = 0$

$$\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad u \in [a,b], v \in [c,d]$$
$$\int_{F_{\vec{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\vec{r}(u,v) \cdot J_{\vec{r}}(u,v) du dv$$
$$J_{\vec{r}}(u,v) = \mid \vec{r'}_u \times \vec{r'}_v \mid = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$\vec{r'}_u = (x'_u, y'_u, z'_u) \quad \vec{r'}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$$
$$\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v = (y'_u z'_v - y'_v z'_u, x'_v z'_u - x'_u z'_v, x'_u y'_v - x'_v y'_u) = (A, B, C) \quad \text{maple}$$
$$f = 1 \text{ finder arealet}$$

6.7.1 Parametriseringer

6.7.1.1 Grafflader

$$P_{\tilde{\vec{r}}} : (x(u,v), y(y,v), 0) \qquad u \in [a,b], v \in [c,d]$$
$$F_{\vec{r}} : \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), g\,(x(u,v), y(u,v))) \qquad u \in [a,b], v \in [c,d]$$

Eksempel

$$z = g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$
$$P_{\tilde{\vec{r}}} : (ucos(v), usin(v), 0) \qquad u \in [0,1], v \in [0, 2\pi]$$
$$F_{\vec{r}} : \vec{r}(u,v) = \big(ucos(v), usin(v), (ucos(v))^2 + (usin(v))^2 + 1\big)$$
$$= \big(ucos(v), usin(v), u^2 + 1\big)$$

6.7.1.2 Cylinderflader

Tænkt toiletrulle, kun den krumme flade

$$\vec{r}(u,v) = (Rcos(v), Rsin(v), u) \qquad u \in [0,h], v \in [0, 2\pi]$$

Eksempel
Vi laver et planetarium(bygningen) da vi fører en plan gennem røret.

$$z = 5 - x$$
$$\vec{r}(u,v) = (Rcos(v), Rsin(v), u \cdot (5 - Rcos(v))) \qquad u \in [0,1], v \in [0, 2\pi]$$

Hvis vi nu skulle få trang til at bestemme taget så gøres det således:

$$\vec{r}(u,v) = (ucos(v), usin(v), 5 - ucos(v)) \qquad u \in [0,R], v \in [0, 2\pi]$$

6.7.1.3 Omdrejningsflade

Kurven for omdrejningsfladen vi skal finde kaldes en profilkurve.

$$\text{profilkurve} : (g(u), 0, h(u)) \qquad u \in [a,b]$$
$$\vec{r}(u,v) = (g(u)cos(v), g(u)sin(v), h(u)) \qquad u \in [a,b], v \in [0, 2\pi]$$

Eksempel kugleskal
I dette tilfælde vil profilkurven være en halvcirkel.

$$\text{Profilkurven} : (Rsin(u), 0, Rcos(u)) \qquad u \in [0, \pi]$$
$$\vec{r}(u,v) = (Rsin(u)cos(v), Rsin(u)sin(v), Rcos(u)) \qquad u \in [0, \pi] v \in [0, 2\pi]$$
$$\vec{r'}_u = (Rcos(u)cos(v), Rcos(u)sin(v), -Rsin(u)) \quad \vec{r'}_v = (-Rsin(u)sin(v), Rsin(u)cos(v), 0)$$
$$J_{\vec{r}} = \mid \big(R^2 sin^2(u)cos(v), -R^2 sin^2(u)sin(v), R^2 sin(u)cos(u)cos^2(v) + R^2 sin(u)cos(u)sin^2(v)\big) \mid$$
$$= \mid \big(R^2 sin^2(u)cos(v), -R^2 sin^2(u)sin(v), R^2 cos(u)sin(u)\big) \mid$$
$$= \sqrt{R^4 sin^4(u)cos^2(v) + R^4 sin^4(u)sin^2(v) + R^4 cos^2(u)sin^2(u)}$$
$$= R^2 \sqrt{sin^2(u)} = R^2 sin(u)$$

Areal for kuglen er dermed:

$$\int_{F_{\vec{r}}} 1 d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \big(R^2 sin(u)\big) dudv = 4\pi R^2$$

Eksempel kegle

$$\begin{gathered} z = 3 - 3x \\ \text{Profilkurven} : (u, 0, 3 - 3u)) \qquad u \in [0, 1] \\ \vec{r}(u, v) = (ucos(v), usin(v), 3 - 3u) \qquad u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi] \\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z \\ J_{\vec{r}}(u, v) = \sqrt{10} u \\ \int_{F_{\vec{r}}} f d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(u^2 - 3u + 3\big) dudv \\ = \frac{3}{2} \sqrt{10} \pi \end{gathered}$$

6.8 Rumintegrale

Parametriseringen, rumkurven, er den vi kalder $\vec{r}$
Vi skal her parametrisere en rummelig figur i $\mathbb{R}^3$ vi skal her have et parameterinterval med tre parametre.
Vores område vil nu blive kaldet $\Omega_{\vec{r}}$

$$\begin{gathered} \vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \qquad u \in [a, b] \quad v \in [c, d] \quad w \in [e, f] \\ \int_{\Omega_{\vec{r}}} f d\mu = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(\vec{r}(u, v, w)) \cdot J_{\vec{r}}(u, v, w) dudvdw \\ f = 1 \text{ finder volumen} \\ J_{\vec{r}}(u, v, w) = \mid \Big(\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v\Big) \bullet \vec{r'}_w \mid = \mid det \begin{bmatrix} \vec{r'}_u & \vec{r'}_v & \vec{r'}_w \end{bmatrix} \mid \end{gathered}$$

6.8.1 Specialtilfælde

6.8.1.1 Grafbegrænset område

Et område som eksempelvist ligger i xy planer løftes op til en graf, og vi har nu en beholder under grafen.
Vi kunne beskrive figuren som

$$\begin{gathered} C = (x(u, v), y(u, v), 0) \qquad u \in [a, b], v \in [c, d] \\ z = h(x, y) \\ \vec{r}(u, v, w) = (x(u, v), y(u, v), w \cdot h(x(u, v), y(u, v))) \qquad u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [0, 1] \\ J_{\vec{r}}(u, v, w) = \mid det \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & 0 \\ y'_u & y'_v & 0 \\ wh'_u & wh'_v & h \end{bmatrix} \mid \\ = \mid h \cdot det \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} \mid \end{gathered}$$

Særtilfælde
Er det plane område et rektangel $[a, b] \times [c, d]$

$$\begin{gathered} \vec{r}(u, v, w) = (u, v, w \cdot h(x, y)) \qquad u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [0, 1] \\ J_{\vec{r}} = h(u, v) \end{gathered}$$

6.8.1.2 Omdrejningslegemer

Området for omdrejningslegemet kaldes profilområdet, det er en flade.

$$
\begin{aligned}
&(g(u,v),0,h(u,v)) \qquad g \geq 0 \\
\vec{r}(u,v,w) &= (g(u,v)\cdot cos(w), g(u,v)\cdot sin(w), h(u,v)) \qquad u\in[a,b], v\in[c,d], w\in[0,2\pi] \\
J_{\vec{r}}(u,v,w) &= \mid det \begin{bmatrix} g'_u\cdot cos(w) & g'_v\cdot cos(w) & -g\cdot sin(w) \\ g'_u\cdot sin(w) & g'_v\cdot sin(w) & g\cdot cos(w) \\ h'_u & h'_v & 0 \end{bmatrix} \mid \\
&= \mid h'_u\left(g'_v g\cdot cos^2(w) + g'_v\cdot g\cdot sin^2(w)\right) - h'_v\left(g'_u g\cdot cos^2(w) + g'_u g\cdot sin^2(w)\right) \mid \\
&= \mid h'_u g'_v g - h'_v g'_u g \mid = g \mid g'_u h'_v - g'_v h'_u \mid \\
&= g \mid det \begin{bmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{bmatrix} \mid
\end{aligned}
$$

Eksempel, kuglens rumfang

$$
\begin{aligned}
&\text{profilområdet:} (usin(v),0,ucos(v)) \qquad u\in[0,R], v\in[0,\pi] \\
\text{kuglen} \quad &\vec{r}(u,v,w) = (usin(v)cos(w), usin(v)sin(w), ucos(v)) \qquad w\in[0,1] \\
J_{\vec{r}}(u,v,w) &= usin(v) \mid det \begin{bmatrix} sin(v) & ucos(v) \\ cos(v) & -usin(v) \end{bmatrix} \mid \\
&= usin(v) \mid -usin^2(v) - ucos^2(v) \mid \\
&= u^2 sin(v) \\
\text{Volumen} \quad V_k &= \int_{\Omega\vec{r}} d\mu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R u^2\cdot sin(v)dudvdw = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

6.8.2 Gabriels horn

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} \qquad x \geq 1 \\
\text{Profilkurve} \quad &\left(\frac{1}{u}, 0, u\right) \\
\text{Profilområde} \quad &\left(v\frac{1}{u}, 0, u\right) \\
\vec{r}(u,v,w) &= \left(\frac{v}{u}sin(w), \frac{v}{u}sin(w), u\right) \qquad w\in[0,2\pi] \\
J_{\vec{r}}(u,v,w) &= g(u,v) \mid \det \begin{bmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid = \frac{v}{u^2} \\
V_{horn} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{\infty} \frac{v}{u^2}dudvdw \\
\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2}du &= \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{u^2}du = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{N} - (-1)\right) = 1 \\
V_{horn} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (v)dvdw = \pi \\
\text{Omdrejningsfladen} \quad \vec{r}(u,v) &= \left(\frac{1}{u}cos(v), \frac{1}{u}sin(v), u\right) \qquad v\in[0,2\pi] \\
J_{\vec{r}} &= \mid \begin{bmatrix} \vec{r'}_u & \vec{r'}_v \end{bmatrix} \mid \\
&= \frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^4}} \\
A_{horn} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}\right)dudv \qquad \frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^4}} \leq \frac{1}{u} \\
&\geq \infty
\end{aligned}
$$

7 Vektorfelter

Foregår i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, forestil dig et vejrkort med vind indtegnet.

7.1 Definition

$$\vec{V}(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z)) \qquad V_1, V_2, V_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \textit{glatte}$$

Hvis alle vektorer i vektorfeltet bevæger sig væk fra et punkt kaldes denne et eksplosionsfelt.

7.2 Gradientfelter

Ikke alle vektorfelter er gradientfelter.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \bigtriangledown f = \left(f'_x, f'_y\right) = (V_1, V_2)$$

Betingelse for at et vektorfelt er et gradientfelt er at youngs sætning skal være gældende.

7.2.1 Youngs sætning

Også denne vi benytter ved Hessematricen

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

7.3 Førstegrads vektorfelter

I $\mathbb{R}^2$, nemt at se hvorledes det kan laves i $\mathbb{R}^3$

$$\vec{V}(x,y) = \begin{bmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \vec{b} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

7.4 Flowkurver

Beskrivelse af hvordan et partikel bevæger sig i feltet
I $\mathbb{R}^2$
En kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ er en flowkurve for vektorfeltet $\vec{V}(x,y)$ hvis $\vec{r'}(t) = \vec{V}(x(t), y(t))$ hvilket betyder at. Husk koblede diffirentialligninger her, dsolve.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V_1}\left(x(t), y(t)\right) \\ \vec{V_2}\left(x(t), y(t)\right) \end{bmatrix} \quad t \in I$$

7.4.1 Eksempel

$$\vec{V}(x,y) = (1,1)$$
$$\text{flowkurve: } \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + k_1 \\ t + k_2 \end{bmatrix}$$

7.5 Divergens og rotation

7.5.1 Nabla-operatoren

$$\vec{\bigtriangledown} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

7.5.2 Divergens

$$div(\mathbf{V}) = \vec{\bigtriangledown} \bullet \vec{\mathbf{V}} = \underbrace{\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)}_{\text{Funktion af 3-var}}$$

7.5.3 Rotation (Curl)

$$\begin{aligned}\vec{\bigtriangledown} \times \vec{V} &= Rot(V)\\ &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\\ \vec{\bigtriangledown} \times \vec{V} &= \vec{0} \qquad \vec{V} \text{ er gradientfelt} \rightarrow \bigtriangledown f = \vec{V}\end{aligned}$$

7.6 Tangentielt kurveintgral

Lad $\vec{V}(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}h(x,y,z) &= \vec{V}(x,y,z) \bullet \vec{e}\\ &=\mid \vec{V} \mid \cdot cos(v)\\ \vec{e} = \frac{\vec{r'}(t)}{\mid \vec{r'}(t) \mid} & \qquad J_{\vec{r}}(t) =\mid \vec{r'}(t) \mid\\ Tan(V, K_{\vec{r}}) &= \int_{K_{\vec{r}}} \vec{V} \bullet \vec{e} d\mu\\ &= \int_a^b \vec{V}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r'}(t)}{\mid \vec{r'}(t) \mid} \cdot J_{\vec{r}}(t) dt\\ &= \int_a^b \vec{V}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) dt\end{aligned}$$

7.6.1 Gradientfelt

Hvad hvis v er et gradientfelt?

$$\begin{aligned}f'(\vec{r}(t)) &= \bigtriangledown f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)\\ &= \vec{V}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)\\ Tan(V, K_{\vec{r}}) &= f(r(b)) - f(r(a))\end{aligned}$$

7.6.2 Cirkulation

Hvis $K_{\vec{r}}$ er en lukket kurve så kaldes $Tan(\vec{V}, K_{\vec{r}})$ for cirkulation af $\vec{V}$ langs $K_{\vec{r}}$

$$\begin{aligned}Tan\left(\vec{V}, K_{\vec{r}}^0\right) &= \oint \vec{V}\vec{e} d\mu\\ &= K_{\vec{r}}^0\end{aligned}$$

Hvis $\vec{v}$ er et gradientfelt gælder det at

$$\oint \vec{V}\vec{e} d\mu = 0$$

7.6.3 Eksemplet vi alle har ventet på 2

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= x^2 \cdot y + y \cdot z + z\\ \vec{V}(x,y,z) &= \vec{\nabla} f(x,y,z) = (2xy, x^2 + z, y + 1)\\ &(0,0,0) \qquad (1,2,3)\end{aligned}$$

Tjek lige rotationen

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = (0,0,0)$$

Så kan vi benytte at den er et gradientfelt.

$$Tan(\vec{V}, K_{\vec{r}}) = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 11$$

Nu vil vi finde f når v kender $\vec{V}$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (xt, yt, z2) \qquad t \in [0,1] \\
f(x,y,z) - f(0,0,0) &= Tan(\vec{V}, K_{\vec{r}}) \\
&= \int_0^1 \vec{V}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)dt \\
&= \int_0^1 3x^2t^2y + 2zt + zdt \\
&= x^2y + zy + z
\end{aligned}$$

8 Flux

8.1 Fluxintegral

Er et specielt fladeintegrale, hvor vi dog har et vektorfelt

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$$

Enhedsnormalen $\vec{n}$ vil her være vinkelret på fladen og af længden 1. $\vec{N}$ vil her være vinkelret, men dog ikke normeret.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \mathbf{V} \bullet \vec{n} \\ &= |\mathbf{V}| \cdot |\vec{n}| \cdot cos(\theta) \end{aligned}$$

Definition:
Fluxen af $\mathbf{V}$ gennem den parametriserede flade $F_{\vec{r}}$ er givet ved

$$Flux\,(\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) = \int_{F_{\vec{r}}} \mathbf{V} \bullet \vec{n}_F \; d\mu$$

$$\vec{n}_F = \begin{cases} \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \\ \vec{0} \text{ hvis } \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \vec{0} \end{cases}$$

$$Flux((\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) \int_c^d \int_b^a \mathbf{V}(\vec{r}(u,v)) \bullet \underbrace{(\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v))}_{Fladeintegral, \vec{N}_F} \; du \; dv$$

8.1.1 Eksempel 1

Cylinderflade, radius R og højde h

$$\begin{gathered} u \in [0, 2\pi] \qquad v \in [0, h] \\ \vec{r}(u,v) = (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), v) \\ \vec{r}'_u(u,v) = (-R \cdot sin(u), R \cdot cos(u), 0) \qquad \vec{r}'_v(u,v) = (0,0,1) \\ \vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v) = (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} Flux(\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{V}(R \cdot cos(u), R \cdot sin(y), v) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \; du \; dv \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} R^2 cos^2(u) + R^2 sin^2(u) \; du \; dv \\ &= 2\pi \cdot h \cdot R^2 \end{aligned}$$

8.1.2 Eksempel 2

Samme $\vec{r}$ benyttes hertil

$$\mathbf{W} = (1,0,0)$$

$$\begin{aligned} Flux(\mathbf{W}, F_{\vec{r}}) &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{W}(R \cdot cos(u), R \cdot sin(y), v) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \; du \; dv \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} (1,0,0) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \; du \; dv \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} R \cdot cos(u) \; du \; dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

8.1.3 Eksempel 3

$$\mathbf{Q} = (-y, x, 0)$$

$$\begin{aligned}
Flux(\mathbf{Q}, F_{\vec{r}}) &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{Q}(R \cdot cos(u), R \cdot sin(y), v) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \ du \ dv \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} (-Rsin(u), Rcos(u), 0) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) \ du \ dv \\
&= \int_0^h \int_0^{2\pi} -R^2 sin(u)cos(Y) + R^2 cos(u)sin(u) \ du \ dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

8.2 Flux som volumenekspansion

Hertil benytes fluxen samt flowkurver

$$\frac{d}{dt} Vol(\Omega(t))\Big|_{t=0} = Flux(\mathbf{V}, F_{\vec{r}})$$

8.2.0.1 Eksempel 4

$$\begin{gathered}
\vec{r}(u, v) = (2, u, v) \qquad u \in [0, b] \quad v \in [0, h] \\
\vec{r}'_u = (0, 1, 0) \qquad \vec{r}'_v = (0, 0, 1) \\
\vec{r}'_u \times \vec{r}'v = (1, 0, 0) \\
\mathbf{V}(x, y, z) = (x, 0, 0) \\
Flux(\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) = 2 \cdot b \cdot h
\end{gathered}$$

Flowkurvner findes nu for **V**

$$\begin{gathered}
\vec{h}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\
\vec{h}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
x(t) = c_1 \cdot e^t \qquad y(t) = c_2 \qquad z(t) = c_3 \\
\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^t \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}
\end{gathered}$$

Flowkurver for de enkelte hjørner vil så være

$$\begin{gathered}
H_1 = (2, 0, 0) \qquad H_2 = (2, b, 0) \\
\vec{h}(0)_{H_1} = H_1 = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{h}(0)_{H_2} = H_2 = \begin{bmatrix} 2e^t \\ b \\ 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}$$

Volumenet kan nu beregnes og vi finder frem til Fluxen

$$\begin{gathered}
Vol(\Omega(t)) = 2e^t \cdot b \cdot h - 2 \cdot b \cdot h \\
\frac{d}{dt} Vol(\Omega(t)) = 2e^t \cdot b \cdot h \\
\frac{d}{dt} Vol(\Omega(t))\Big|_{t=0} = 2 \cdot b \cdot h
\end{gathered}$$

8.3 Gauss' sætning (divergenssætningen)

Vi ser på et rummelige område $\Omega_{\vec{r}}$ (lukket flade). Hvor $\partial\Omega_{\vec{r}}$ = randen af $\Omega_{\vec{r}}$, omslutter $\Omega_{\vec{r}}$ fuldkommen. $\vec{n}$ er den udadrettede enhedsnormal. Vi kan nu finde fluxen ud igennem randen ved brug af et vektorfelt.

$$Flux(\mathbf{V}, \partial\Omega_{\vec{r}}) = \int_{\partial\Omega_{\vec{r}}} \mathbf{V} \bullet \vec{n} \ d\mu = \int_{\Omega_{\vec{r}}} div(\mathbf{V}) \ d\mu$$

8.3.1 Eksempel med 1 variabel

$$div(f) = f'(X) \qquad \Omega = [a, b]$$
$$\int f'(x)\ dx = \int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$$
$$\mathbf{V}(x) = (f(x), 0) \qquad \partial\,[a, b] = \{a, b\}$$
$$\int_{\{a,b\}} \mathbf{V} \bullet n(x)\ dx = f(b) - f(a)$$

8.3.2 Eksempel 2, cylinderflade

$$F_{\vec{r}} = \text{ den krumme overflade}$$
$$\vec{r}(u, v) = (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), v) \qquad u \in [0, 2\pi] \qquad v \in [0, h]$$
$$\vec{r}'_u = (-R \cdot sin(v), R \cdot cos(u), 0) \qquad \vec{r}'_v = (0, 0, 1)$$
$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0) = \vec{N}_F$$
$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(x + tanh\left(y \cdot z \cdot e^{cosh(y)}\right), sinh(x + z) + y, z\right)$$

Beregn fluxen af $\mathbf{V}$ gennem den krumme overflade $F_{\vec{r}}$

$$Flux(\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{V}(\vec{r}(u, v) \bullet (R \cdot cos(u), R \cdot sin(u), 0)\ du\ dv \qquad \text{bæ...}$$
$$div(\mathbf{V}) = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$Flux\left(\mathbf{V}, \begin{matrix} top \\ bund \\ F_{\vec{r}} \end{matrix}\right) = \int_\Omega div(\mathbf{V})\ d\mu = 3\int_\Omega 1\ d\mu = 3\pi R^2 h$$
$$Flux(\mathbf{V}, top) = \int_{top} \mathbf{V} \bullet \vec{n}\ d\mu = h\pi R^2$$
$$Flux(\mathbf{V}, bund) = \int_{bund} \mathbf{V} \bullet \vec{n}\ d\mu = 0$$
$$Flux(\mathbf{V}, F_{\vec{r}}) = 3 \cdot \pi R^2 h - h \cdot \pi \cdot R^2$$

8.3.3 Eksempel 3, konstant divergens

$$div(\mathbf{V}) = k$$
$$\int_{\Omega_{\vec{r}}} k\ d\mu = k \cdot Vol(\Omega)$$

8.3.4 Eksempel 4, divergens 0

Også kaldet divergensfri

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$
$$div(\mathbf{V}) = 0$$

8.3.5 Lav et divergensfrit vektorfelt

Lad **V** være givet, hvordan laver vi et vektrofelt **W**, med $div(\mathbf{W}) = 0$

$$rot(\mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{W}$$

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3) \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{W} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

$$div(rot(\mathbf{W})) = 0$$

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{W}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right)$$

8.4 Stokes (cirkulation)

Givet **V** og en åben flade F med randkurven ∂F

$$\vec{n}_F = \begin{cases} \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \\ \vec{0} \text{ hvis } \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Cirk(\mathbf{V}, \partial F) &= \int_{\partial F} \mathbf{V} \bullet \vec{e}_{\partial F} \ d\mu \\ &= \int_{\partial F} Rot(\mathbf{V}) \bullet \vec{n}_F \ d\mu \\ &= Flux(Rot(\mathbf{V}), \partial F) \end{aligned}$$

Højre-konvention skal være gældende for at kunne gøre dette.

1. Højrehånd
2. Kig fra spids af $\vec{n}$, så skal strømmen gå mod uret
3. Står vi på randen indefra skal strømmen gå mod venstre

8.4.1 Eksempel 1

Givet en lukket kruve K i (x,y)-planen som består af 4 rette linjestykker samt vektorfeltet **V**.

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(x \cdot y, y, x^2\right)$$

Vi ønsker nu at beregne

$$\oint \vec{V}\vec{e}_k \ d\mu$$

Gammel metode
Beregn de fire kurveintegraler og summere disse.

$$\vec{r}_{k1}(u) = (1 + u \cdot 2, 1, 0) \qquad u \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_{k1} \mathbf{V} \bullet \vec{e}_{k1} \ d\mu &= \int_0^1 \mathbf{V}(r(u)) \bullet \vec{r}'_{k1}(u) \ d\mu \\ &= \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} 1+2u \\ 1 \\ (1+2u)^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) du \\ &= \int_0^1 (2 + 4 \cdot u) \ d\mu \\ &= 4 \end{aligned}$$

Med stokes
Benytter vi nu istedet en flade kan vi opskrive en parameterfremstilling som

$$\vec{r}(u,v) = (u,v,0) \qquad u \in [1,3] \qquad v \in [1,3]$$

Vi bliver derefter nødt til at undersøge hvorvidt parameterfremstillingen for f er korrekt orienteret, vi kan dermed beregnet.

$$\vec{N} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Heraf ses det at orienteringen er fin

$$\begin{aligned}
Rot(\mathbf{V}) &= \begin{bmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} yx \\ y \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x \\ -x \end{bmatrix} \\
\oint_K \mathbf{V} \bullet \vec{e}_k \; d\mu &= \oint_K Rot(\mathbf{V}(r(u))) \bullet \vec{N} \; d\mu \\
&= \int_1^3 \int_1^3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2u \\ u \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv \; dv \\
&= \int_1^3 \int_1^3 -u \; du \; dv \\
&= -8
\end{aligned}$$