Ligevægtsligninger for bjælker

Snitmomentet, $M[x]$, normalkraften, $N[x]$ og tværkraften, T[x] skal opfylde følgende ligninger for at være i ligevægt:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q[x]$$
$$\frac{dT}{dx} = -q[x]$$
$$\frac{dN}{dx} = p[x]$$

Her er $p[x]$ den axielle last per længde og $q[x]$ er den transverse last per længde. Bemærk at ovenstående ligninger er gældende under den i bogen anvendte fortegnskonvention for snitstørrelser (se figur 3.4).

Hvor der optræder koncentrerede belastninger springer snitstørrelserne i henhold til følgende ligevægtsligninger:

$$\Delta M = -V$$

$$\Delta T = -Q$$

$$\Delta N = -P$$

Se figur 3.5 for fortegnskonvention.

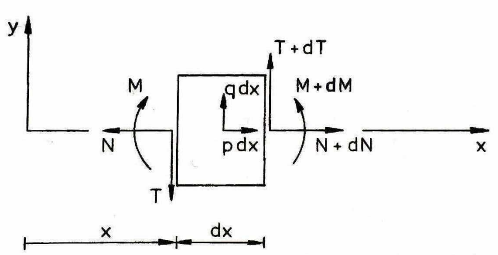


Fig. 3.4. Udsnittet bjælkeelement under fordelt ydre belastning.

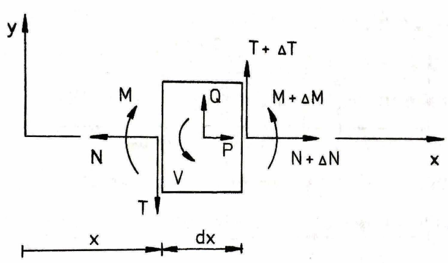


Fig. 3.5 Koncentrerede belastninger.

Tværsnitsparametre og spændingsfordeling

Tværsnitsarealet, A, tværsnittets statiske moment om z-aksen, S, og tværsnittets fladeinertimoment om z-aksen kan findes af:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA \\ S &= \int_A y dA = 0 \\ I &= \int_A y^2 dA \end{aligned}$$

Beliggenheden af koordinatsystemet ($y = 0$) bestemmes ud fra betingelsen at det statiske moment forsvinder. Bøjningsneutralaksen defineres ved $y = 0$.

Normalkraften, N, og snitmomentet, M, kan udtrykkes ved bøjningsneutralaksens tøjningen, ϵ_0, og krumningsradius, ρ:

$$\begin{aligned} N &= EA\epsilon_0 \\ M &= \frac{EI}{\rho} \end{aligned}$$

Tøjningsstivheden defineres ved EA, og bøjningsstivheden defineres som EI.

Spændingsfordelingen gennem bjælken kan udtrykkes ved

$$\sigma[y] = E\left(\epsilon_0 - \frac{y}{\rho}\right) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} \cdot y$$

Den maksimale spænding under ren bøjning ($N = 0$) kan udtrykkes ved hjælp af bøjningsmodstanden, $W = I/|y|_{max}$, som

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|}{W}$$

Kendes et tværsnits fladeinertimoment omkring tværsnittets tyngdepunkt, I, kan fladeinertimomentet findes om en forskudt akse af Steiner's sætning (parallelakseteoremet):

$$I_{forskudt} = I + (\Delta y)^2 \cdot A$$

hvor Δy er den forskudte akses afstand til tyngdepunktet.

Bjælkeligningen og den elastiske linies ligning

Udbøjningen af en bjælke kan findes af bjælkens differentialligning:

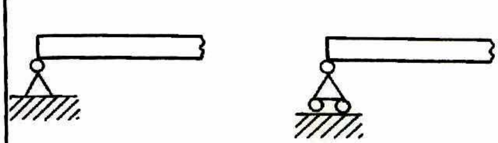
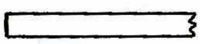
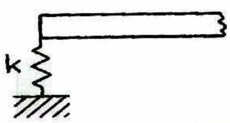
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2u}{dx^2}\right) = q[x]$$

Til denne ordinære 4. ordens lineære differentialligning skal der defineres 4 randbetingelser som kan findes af tabel 4.1.

Udbøjningen kan også findes af en anden ordens differentialligning, hvis momentfordelingen $M[x]$. Denne ligning kaldes den elastiske linies ligning:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Til denne ordinære 2. ordens lineære differentialligning skal der defineres 2 kinematiske randbetingelser som kan findes af tabel 4.1.

	Kinematiske RB	Statiske RB
Simpel understøtning 	$u = 0$	$M = EIu'' = 0$
Fast indspændt 	$u = 0 \,,\ u' = 0$	–
Fri bjælkeende 	–	$M = EIu'' = 0$ $T = -(EIu'')' = 0$
Fjedrende understøtning 	–	$M = EIu'' = 0$ $T = -(EIu'')' = ku^{*)}$

*) Bemærk, at ku erstattes af −ku , hvis bjælkeenden vender i den positive x−retning.

Statisk ubestemte konstruktioner

I statisk ubestemte konstruktioner kan understøtningsreaktionerne (og derved snit størrelserne) ikke bestemmes vha. statikken (kraft- og momentligevægte) alene, da antallet af ubekendte reaktioner er større end antallet af ligevægtsligninger.

Graden af statisk ubestemthed = Antal reaktioner - Antal ligevægtsligninger
- Antal overgangsbetingelser

For plane problemer haves 3 ligevægtsligninger (2 translation + 1 moment).
For rumlige problemer haves 6 ligevægtsligninger (3 translation + 3 moment).
Derudover kan der optræde overgangsbetingelser som giver ektra ligninger.

Løsning af statisk ubestemte bjælkeproblemer

Trin 1:

Fjern lige så mange geometriske restriktioner (fx understøtninger) som graden af statisk ubestemthed og påfør de tilhørende reaktioner og/eller snitstørrelser som ydre belastninger (eller såkaldte overtallige kræfter og momenter). Herved er et statisk bestemt hovedsystem indført!

Trin 2:

Bestem de overtallige kræfter og momenter så de geometriske restriktioner alligevel er opfyldt.

Bemærk at størrelsen af regnearbejdet i trin 2 i høj grad afhænger af hvilke overtallige som vælges i trin 1. Det kræver overblik at vælge de overtallige hensigtsmæssigt, og dette overblik kan kun opnås gennem praktisk erfaring med løsning af opgaver.