Noter til Matematik 2

Preben Alsholm

Maj 2000

0.1 Forord

This is the preface.

Kapitel 1

Funktion af flere variable

1.0.1 Topologiske begreber

I sætninger og definitioner vedrørende grænseværdi, kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet af funktioner af to (eller flere) variable får vi brug for en række topologiske begreber. Det er begreber, som man også har brug for, når talen er om funktioner af én variabel, men da indledende kurser normalt kun betragter funktioner af én variabel defineret på et interval eller på en foreningsmængde af endeligt mange intervaller, er behovet for en diskussion af disse begreber dér ikke særligt stort. I det følgende skal de nødvendige topologiske begreber defineres for delmængder af R^2, men begreberne generaliseres let til R^n for $n \in N$.

Definition 1 *Med normen af vektoren $(u, v) \in R^2$ forstås tallet*

$$\|(u, v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Afstanden mellem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i R^2 er

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Definition 2 *Lad U være en delmængde af R^2 indeholdende en cirkelskive med centrum i (a, b). Så kaldes U en omegn om punktet (a, b). Delmængden U er altså en omegn om punktet (a, b), hvis der eksisterer et tal $r > 0$, så*

$$\left\{(x, y) \in R^2 \,|\, \|(x, y) - (a, b)\| < r\right\} \subseteq U$$

Definition 3 *Lad $S \subseteq R^2$ og lad $(a, b) \in S$. Punktet (a, b) kaldes indre i mængden S, hvis der findes en omegn U om (a, b), så $U \subseteq S$. Punktet (a, b) kaldes et randpunkt for S, hvis enhver omegn om (a, b) indeholder et punkt fra S såvel som et punkt fra komplementærmængden til S.*

Definition 4 *Mængden $S \subseteq R^2$ kaldes åben, hvis ethvert af dets punkter er indre i S. Mængden S kaldes lukket (eller afsluttet), hvis komplementærmængden $\complement S$ er åben.*

Definition 5 *Ved det indre af S forstås mængden af indre punkter i S. Ved randen af S forstås mængden af randpunkter for S. Ved afslutningen af S forstås foreningsmængden af S og randen af S.*

Sætning 6 *En mængde S er lukket, hvis og kun hvis den er lig med sin afslutning, d.v.s. hvis og kun hvis S indeholder sin rand.*

Definition 7 *Lad S være en delmængde af R^2. Punktet $(a, b) \in R^2$ kaldes et akkumulationspunkt for S, hvis enhver omegn om (a, b) indeholder uendeligt mange punkter fra S.*

Bemærkning 8 *Vi kunne ligeså godt have brugt følgende formulering: Punktet $(a, b) \in R^2$ kaldes et akkumulationspunkt for S, hvis enhver omegn om (a, b) indeholder mindst ét punkt fra $S \setminus \{(a, b)\}$.*

Definition 9 *Mængden $S \subseteq R^2$ kaldes begrænset, hvis den er indeholdt i en eller anden cirkelskive. D.v.s. S er begrænset, hvis der eksisterer et tal $r > 0$, så*

$$S \subseteq \left\{(x, y) \in R^2 \,|\, \|(x, y)\| < r\right\}$$

Definition 10 *Mængden $S \subseteq R^2$ kaldes sammenhængende, hvis der for ethvert par af punkter A og B i S findes en kurve k i S, der forbinder de to punkter. Ved en kurve forstås her en punktmængde, der kan beskrives en parameterfremstilling $(x, y) = (p(t), q(t)), t \in [a, b]$, hvor p og q er kontinuerte.*

1.0.2 Funktion af to variable

Vi minder først om den generelle funktionsdefinition.

Definition 11 *En funktion er en afbildning, der til ethvert element (punkt) x i en given mængde A ("definitionsmængden") knytter netop et element (punkt) ("billedet") i en anden given mængde B. Grafen af f er mængden $\{(x, y) \in A \times B \,|x \in A \wedge y = f(x$ (Med $A \times B$ betegnes det cartesiske produkt mellem mængderne A og B. Det er mængden af par (x, y), hvor $x \in A$ og $y \in B$).*

Når i definitionen ovenfor mængden A er en delmængde af $R^2 = R \times R$ (eller mere generelt, en delmængde af et cartesisk produkt $S \times T$), siges funktionen f at være en funktion af to variable, idet elementerne i A jo er talpar. Når $B = R$ siges funktionen f at være en reel funktion af to variable. Grafen for en reel funktion af to variable defineret i $A \subseteq R^2$ er mængden

$$\left\{(x, y, z) \in R^3 \,|(x, y) \in A \wedge z = f(x, y)\right\}$$

Hvor grafen for en reel funktion af én variabel er en kurve forløbende i R^2, er grafen for en reel funktion af to variable en flade i R^3. Visualisering af grafen er stadig mulig ved perspektivisk tegning i to dimensioner, men man ser visualiseringsproblemet for reelle funktioner af tre eller flere variable.

Definition 12 *Ved en niveaukurve for en reel funktion f af to variable forstås en kurve med ligningen $f(x,y) = k$, hvor k er en konstant. For enhver konkret værdi af konstanten k kan vi da tale om k-niveaukurven for f.*

Eksempel 13 *Lad f være funktionen givet ved forskriften*

$$f(x,y) = (x-1)\left(y^2 - x^2 - 1\right)$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Nul-niveaukurven er da "kurven" med ligningen $(x-1)\left(y^2 - x^2 - 1\right) = 0$. Vi ser, at nulniveaukurven i realiteten består af 3 kurver, nemlig den lodrette linie $x = 1$ samt de to kurver med ligningerne $y = \pm\sqrt{x^2+1}$.

Grafer og niveaukurver tegnes naturligvis lettest v.hj.a. en computer. Eksempelvis tegnes grafen for funktionen ovenfor således ved brug af Maple:

```
f:=(x,y) -> (x-1)*(y^2-x^2-1); # Definition af f
plot3d( f(x,y), x=-1..2, y=-3..3); # Grafen for f
with(plots): # contourplot ligger i plots-pakken
contourplot( f(x,y), x=-1..2, y=-3..3, contours=[seq(k/4-2,k=0..16)], grid=[40,40]);
# et udvalg af 17 niveaukurver
```

1.0.3 Grænseværdi

Grænseværdibegrebet, som det er kendt fra funktioner af én variabel, generaliseres let til funktioner af flere variable.

Lad f være en funktion af 2 variable. Med $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$, mener man løst sagt, at $f(x,y)$ begynder at ligne tallet A, når blot (x,y) er tæt på (a,b), men dog forskellig fra (a,b). Denne sidste tilføjelse er vigtig: Ved grænseovergangen $(x,y) \to (a,b)$ betragtes aldrig værdier af f i punktet (a,b), og det uanset om f er defineret i (a,b) eller ej. At tale om grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ kan kun blive aktuelt, hvis enhver omegn om (a,b) indeholder et punkt $(x,y) \neq (a,b)$ fra definitionsmængden for f . Et sådant punkt (a,b) kaldes et akkumulationspunkt for definitionsmængden.

Definition 14 *Lad (a,b) være et akkumulationspunkt for definitionsmængden D for den reelle funktion f. Så siges $f(x,y)$ at have en grænseværdi for $(x,y) \to (a,b)$, hvis der findes et tal $A \in R$, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal ε eksisterer et postivt tal δ, så hvis blot $(x,y) \in D$ er indenfor en afstand af δ fra (a,b), så er $f(x,y)$ indenfor en afstand af ε fra A. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \textit{så} \quad 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \wedge (x,y) \in D \Longrightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

Symbolet $\forall$ *skal læses: "for ethvert" (eller "for alle"). Symbolet* $\exists$ *skal læses "der eksisterer". Har* $f(x,y)$ *grænseværdien* A *for* $(x,y) \to (a,b)$*, så skriver man*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

Definition 15 *Lad* (a,b) *være et akkumulationspunkt for definitionsmængden (* D *) for den reelle funktion* f*. Så siger vi, at* $f(x,y) \to \infty$ *for* $(x,y) \to (a,b)$*, hvis der til ethvert (nok så stort) positivt tal* M *eksisterer et postivt tal* δ*, så hvis blot* $(x,y) \in D$ *er indenfor en afstand af* δ *fra* (a,b)*, så er* $f(x,y) > M$*. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall M > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \text{så} \quad 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \wedge (x,y) \in D \Longrightarrow f(x,y) > M$$

Bemærkning 16 *Hvis* $f(x,y) \to \infty$ *for* $(x,y) \to (a,b)$ *kan man godt benytte skrivemåden*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \infty$$

men vi vil ***ikke*** *sige, at grænseværdien eksisterer. Med grænseværdi menes (normalt) et tal.*

Sætning 17 *Hvis* $f(x,y)$ *og* $g(x,y)$ *har grænseværdier for* $(x,y) \to (a,b)$*, så har* $f(x,y) + g(x,y)$ *og* $f(x,y)\, g(x,y)$ *også grænseværdier for* $(x,y) \to (a,b)$*, og vi har*

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \\
\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y)\, g(x,y)) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)
\end{aligned}$$

Hvis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$ *og hvis* $g(x,y) \neq 0$ *i en omegn om* (a,b)*, så har* $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ *også en grænseværdi for* $(x,y) \to (a,b)$ *og der gælder*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$$

Bevis. Resultatet er ganske analogt med resultatet for for funktion af én variabel. Beviset kan føres på ganske samme måde. ■

Sætning 18 *Lad* $(x,y) = (p(t), q(t))$*,* $\quad t \in I$*, være en parameterfremstilling for en kurve* k*, der forløber i definitionsmængden for en funktion* f *af to variable, evt. med undtagelse af punktet* $(a,b) = (p(t_0), q(t_0))$*, hvor* $t_0 \in I$*. Antag, at* p *og* q *er kontinuerte i* t_0*. Så gælder, at hvis grænseværdien* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *eksisterer, så eksisterer også grænseværdien*

$$\lim_{t\to t_0} f(p(t), q(t))$$

og grænseværdierne er ens. Kort sagt: Hvis grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *eksisterer, så eksisterer grænseværdien for* f *også langs enhver kontinuert kurve gående gennem* (a,b) *og har samme værdi.*

Bevis. Antag, at $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ eksisterer og er lig med A. Lad p og q være kontinuerte i $t_0 \in I$ med $(a,b) = (p(t_0), q(t_0))$. Lad $\varepsilon > 0$. Bestem $\delta > 0$, så

$$0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \wedge (x,y) \in D \Longrightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

hvor D er definitionsmængden for f. Da p og q er kontinuerte i t_0, eksisterer der et tal $\delta_1 > 0$, så

$$0 < |t - t_0| < \delta_1 \wedge t \in I \Longrightarrow |p(t) - a| < \frac{\delta}{2} \wedge |q(t) - b| < \frac{\delta}{2}$$

Men vi har

$$\begin{aligned} \|(p(t), q(t)) - (a,b)\| &= \sqrt{(p(t) - a)^2 + (q(t) - b)^2} \\ &\leq |p(t) - a| + |q(t) - b| \end{aligned}$$

Altså fås, at

$$0 < |t - t_0| < \delta_1 \wedge t \in I \Longrightarrow \|(p(t), q(t)) - (a,b)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

således at vi også har

$$0 < |t - t_0| < \delta_1 \wedge t \in I \Longrightarrow |f(p(t), q(t)) - A| < \varepsilon$$

Men dette beviser netop, at $\lim_{t\to t_0} f(p(t), q(t))$ eksisterer og er lig med A. ■

Eksempel 19 *Lad funktionen f være givet ved*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

for $(x,y) \neq (0,0)$. Vi vil undersøge, om grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer. Vi betragter opførslen af f langs x-aksen og langs y-aksen. Vi har $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ for alle $x \neq 0$, og $f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ for alle $y \neq 0$. Altså har f ikke samme grænseværdi langs de to linier. Vi konkluderer, at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer.

Eksempel 20 *Lad f være funktionen*

$$f(x,y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

hvor a, b, c og d er konstanter. Antag, at $(c,d) \neq (0,0)$. Funktionen er åbenbart defineret i mængden D udenfor linien med ligningen $cx + dy = 0$. Specielt er altså $(0,0)$ et akkumulationspunkt for D. Antag nu først, at $c \neq 0$ og $d \neq 0$. Så har vi $f(x,0) = \frac{a}{c}$ for alle $x \neq 0$ og $f(0,y) = \frac{b}{d}$ for alle $y \neq 0$. Det følger heraf, *at grænseværdien* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ikke eksisterer med mindre* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$*, d.v.s.* $ad = bc$*. Til gengæld eksisterer den da også, idet vi da har*

$$f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{dax+dby}{d(cx+dy)} = \frac{bcx+dby}{d(cx+dy)} = \frac{b(cx+dy)}{d(cx+dy)} = \frac{b}{d}$$

for alle $(x,y) \in D$*. Antag nu, at* $d = 0, c \neq 0$ *og* $b \neq 0$*. Så har vi for* $y \neq 0$

$$f\left(y^2, y\right) = \frac{ay^2+by}{cy^2} = \frac{a+\frac{b}{y}}{c}$$

men $\left|\frac{b}{y}\right| \to \infty$ *for* $y \to 0$*. Det samme sker, hvis i stedet* $c = 0, d \neq 0$ *og* $a \neq 0$*. Konklusionen er altså, at* $f(x,y)$ *har en grænseværdi for* $(x,y) \to (0,0)$*, hvis og kun hvis* $ad = bc$*, og i dette tilfælde er funktionen* f *faktisk konstant.*

Sætningens omvendte påstand (at grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ eksisterer, når blot den eksisterer langs en eller anden kontinuert kurve) gælder slet ikke, hvilket følgende eksempel viser.

Eksempel 21 *Lad funktionen* f *være givet ved*

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

for $(x,y) \neq (0,0)$*. Vi vil undersøge, om grænseværdien* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *eksisterer. Vi betragter opførslen af* f *langs* x*-aksen og langs* y*-aksen. Vi har* $f(x,0) = 0$ *for alle* $x \neq 0$*, og* $f(0,y) = 0$ *for alle* $y \neq 0$*. Vi begynder at tro, at* $f(x,y)$ *har en grænseværdi for* $(x,y) \to (0,0)$*. Værdien er så selvfølgelig* 0*. Troen styrkes, når vi betragter grænseværdier langs enhver anden linie* $y = \alpha x$ *gennem* $(0,0)$*. Med* $\alpha \neq 0$ *fås*

$$f(x,\alpha x) = \frac{\alpha x^3}{x^4+\alpha^2x^2} = \frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} \to 0$$

for $x \to 0$*. Men betragter vi* f *langs parablen* $y = x^2$ *fås*

$$f\left(x,x^2\right) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

Langs parablen har f *altså ikke samme grænseværdi som langs de rette linier. Vi konkluderer, at* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ikke eksisterer.*

Eksempel 22 *Lad funktionen* f *være givet ved*

$$f(x,y) = \frac{\phi(x)\,y}{\phi(x)^2+y^2}$$

for $(x, y) \neq (0,0)$. *Her er* ϕ *en funktion med* $\phi(0) = 0$, *der desuden opfylder* $\lim_{x\to 0} |x|^{-p} \phi(x) = 0$ *for et eller andet positivt* p. *I eksemplet ovenfor var* $\phi(x) = x^2$ *og som dér fås, at* $f(x, 0) = 0$ *for alle* $x \neq 0$, *og* $f(0, y) = 0$ *for alle* $y \neq 0$. *Desuden fås på enhver kurve* $y = \alpha |x|^p$, *hvor* $\alpha \neq 0$, *at*

$$f(x, \alpha |x|^p) = \frac{\phi(x)\, \alpha\, |x|^p}{\phi(x)^2 + \alpha^2 |x|^{2p}} = \frac{\phi(x)\, \alpha\, |x|^{-p}}{|x|^{-2p}\, \phi(x)^2 + \alpha^2} \to 0$$

for $x \to 0$. *Men betragter vi* f *langs kurven* $y = \phi(x)$ *fås*

$$f\left(x, x^2\right) = \frac{\phi(x)^2}{\phi(x)^2 + \phi(x)^2} = \frac{1}{2}$$

Langs denne kurve har f *altså ikke samme grænseværdi som langs kurverne* $y = \alpha |x|^p$. *Vi konkluderer, at* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *ikke eksisterer. Et ekstremt eksempel er* $\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ *med* $\phi(0) = 0$. *For denne funktion gælder* $\lim_{x\to 0} |x|^{-p} \phi(x) = 0$ *for ethvert positivt* p.

Bemærkning 23 *Vi lærer af ovenstående eksempel, at man aldrig af opførslen af* f *langs et eller andet antal kurver eller en eller anden klasse af kurver kan konkludere, at* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ *eksisterer. Men finder vi to kurver langs hvilke* f *har forskellige grænseværdier, kan vi være sikre på, at* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ *ikke eksisterer.*

Eksempel 24 *Lad funktionen* f *være givet ved*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

for $(x, y) \neq (0,0)$. *Vi vil undersøge, om grænseværdien* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *eksisterer. Da* $f(x, 0) = 0$ *for alle* $x \neq 0$, *må grænseværdien være* 0, *hvis den da overhovedet eksisterer. Vi har*

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \\ &\leq 1 \cdot |y| \leq \|(x, y)\| = \|(x, y) - (0,0)\| \end{aligned}$$

Idet vi appellerer direkte til definitionen af grænseværdibegrebet, har vi altså for givet $\varepsilon > 0$, *at* $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$, *når blot* $\|(x, y) - (0,0)\| < \varepsilon$. *Dermed har vi vist, at* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *eksisterer og er lig med* 0.

Eksempel 25 *Lad funktionen* f *være givet ved*

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$$

for $(x, y) \neq (0,0)$. *Vi vil undersøge, om grænseværdien* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *eksisterer. Da* $f(x, 0) = 0$ *for alle* $x \neq 0$, *må grænseværdien være* 0, *hvis den* *da overhovedet eksisterer. Vi har, idet vi udnytter uligheden $2ab \leq a^2 + b^2$ med $a = x^2$ og $b = |y|$,*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= |f(x,y)| = \frac{|x|^3 |y|}{x^4 + y^2} = \frac{|x| x^2 |y|}{x^4 + y^2} \\ &\leq \frac{|x| \frac{1}{2} \left(x^4 + |y|^2 \right)}{x^4 + y^2} = \frac{1}{2} |x| \leq \frac{1}{2} \|(x,y)\| = \frac{1}{2} \|(x,y) - (0,0)\| \end{aligned}$$

Igen appellerer vi direkte til definitionen af grænseværdibegrebet. For givet $\varepsilon > 0$ har vi, at $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, når blot $\|(x,y) - (0,0)\| < 2\varepsilon$. Dermed har vi vist, at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer og er lig med 0.

1.0.4 Kontinuitet

Først kommer den helt generelle definition af kontinuitet.

Definition 26 *En funktion $f \colon D \subseteq R^2 \to R$ kaldes kontinuert i punktet $(a,b) \in D$, hvis*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \text{så} \quad \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \wedge (x,y) \in D \Longrightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$$

Når punktet (a,b) er et akkumulationspunkt for D, hvilket f.eks. er tilfældet, når D er en åben mængde, så får vi følgende velkendte resultat, der ofte ses brugt som definition.

Sætning 27 *Lad $(a,b) \in D$ være et akkumulationspunkt for D. En funktion $f\colon D \subseteq R^2 \to R$, er da kontinuert i (a,b), hvis og kun hvis*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Bemærkning 28 *Med den givne definition er en funktion, hvis definitionsområde omfatter isolerede punkter, automatisk kontinuert i disse. Eksempelvis er følgende funktion kontinuert i hele sit definitionsområde:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 7 & for \quad (x,y) = (-3,-2) \\ x^2 y & for \quad x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}$$

Funktionens definitionsområde er åbenbart $R_+^2 \cup \{(-3,-2)\}$. Kontinuiteten i $(-3,-2)$ følger ved til et givet $\varepsilon > 0$ at vælge $\delta = 1$ (for eksempel). Så er nemlig $\|(x,y) - (-3,-2)\| < \delta \wedge (x,y) \in D$ kun opfyldt for $(x,y) = (-3,-2)$, og i så fald har vi jo, at $|f(x,y) - f(-3,-2)| = |f(-3,-2) - f(-3,-2)| = 0 < \varepsilon$. Bemærk, at fordi punktet $(-3,-2)$ ikke er et akkumulationspunkt for definitionsområdet, er grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(-3,-2)} f(x,y)$ ikke defineret.

Sætning 29 *Hvis $f, g\colon D \subseteq R^2 \to R$ begge er kontinuerte i $(a,b) \in D$, så er også $f+g$ og fg kontinuerte i (a,b). Hvis desuden $g(a,b) \neq 0$, så er $\frac{f}{g}$ kontinuert i (a,b).*

Sætning 30 *Lad* $D_1 \subseteq R^2$, $D_2 \subseteq R$ *og lad* $g\colon D_1 \to D_2$, *og* $f\colon D_2 \to R$. *Hvis* g *er kontinuert i* $(a,b) \in D_1$ *og* f *er kontinuert i* $g(a,b)$, *så er* $f \circ g$ *kontinuert i* (a,b).

Sætning 31 *Lad* $D_1 \subseteq R^2$, $D_2 \subseteq R^2$ *og lad* $g_1\colon D_1 \to D_2$, $g_2\colon D_1 \to D_2$ *og* $f\colon D_2 \to R$. *Hvis* g_1 *og* g_2 *begge er kontinuerte i* $(a,b) \in D_1$ *og* f *er kontinuert i* $(g_1(a,b), g_2(a,b))$, *så er funktionen* $(x,y) \longmapsto f(g_1(x,y), g_2(x,y))$ *kontinuert i* (a,b).

Sætning 32 *Lad funktionen* $f\colon D \subseteq R^2 \to R$ *være kontinuert i* $(a,b) \in D$. *Lad funktionen* f_1 *være givet ved* $f_1(x) = f(x,b)$ *for alle de* x *for hvilke* $(x,b) \in D$. *Så er* f_1 *kontinuert i* a.

Sætning 33 *Lad funktionen* $f_1\colon D_1 \subseteq R \to R$ *være kontinuert i* $a \in D_1$. *Lad funktionen* f *være givet ved* $f(x,y) = f_1(x)$ *for alle* $(x,y) \in D_1 \times R$. *Så er* f *kontinuert i* (a,b) *for ethvert* $b \in R$.

Eksempel 34 *Lad funktionen* f *være givet i* R^2 *ved*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(y-x^2\right)^2}{y^2+x^4} & for \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & for \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vi ser, at $f(x,0) = 1$ *for alle* $x \in R$ *og ligeledes, at* $f(0,y) = 1$ *for alle* $y \in R$. *Altså er med* $(a,b) = (0,0)$ *begge de to funktioner* $x \longmapsto f(x,b)$ *og* $y \longmapsto f(a,y)$ *kontinuerte (overalt). Dette sikrer åbenbart ikke, at* f *er kontinuert i* (a,b). *Vi har jo, at* $f\left(x,x^2\right) = 0$ *for* $x \neq 0$, *hvoraf ses, at* $f(x,y)$ *ikke har nogen grænseværdi for* $(x,y) \to (0,0)$.

Definition 35 *En funktion, som er kontinuert i alle punkter af dens definitionsområde, kaldes en kontinuert funktion.*

Sætning 36 *Lad* $D \subseteq R^2$ *og lad* $f\colon D \to R$ *være kontinuert. Så gælder:*

1. *Hvis* D *er en sammenhængende mængde, så er billedmængden* $f(D)$ *et interval, og* f *antager altså enhver værdi mellem hver to givne funktionsværdier.*

2. *Hvis* D *er lukket og begrænset, så er* $f(D)$ *også lukket og begrænset, og* f *antager dermed såvel en største- som en mindsteværdi på* D.

3. *Hvis* D *er en lukket, begrænset og sammenhængende mængde, så er billedmængden* $f(D)$ *et lukket og begrænset interval.*

Bevis. Vi udelader beviset, men bemærker, at 3. kun er en sammenskrivning af 1. og 2. ■

1.0.5 Partiel differentiation

Definition 37 *Lad f være en reel funktion af 2 variable, $f\colon S \subseteq R^2 \to R$. Antag, at (a,b) er et indre punkt i S. Funktionen $x \longmapsto f(x,b)$ er da defineret i hvertfald i et interval omkring a. Hvis denne funktion er differentiabel i a med differentialkvotient A, så siges f at have en partiel afledet m.h.t. x i (a,b), og den partielle afledede m.h.t. x i punktet (a,b) er A. Denne partielle afledede betegnes med $f_x(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), (D_1 f)(a,b)$ eller et lignende symbol. Hvis funktionen $y \longmapsto f(a,y)$ er differentiabel i b med differentialkvotient B, så siges f at have en partiel afledet m.h.t. y i (a,b), og den partielle afledede m.h.t. y i punktet (a,b) er B. Denne partielle afledede betegnes med $f_y(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), (D_2 f)(a,b)$ eller et lignende symbol.*

Bemærkning 38 *En funktion af to variable har altså en partiel afledet m.h.t. den ene variabel, hvis den funktion af én variabel, man får ved at fastfryse den anden variable, er differentiabel.*

Bemærkning 39 *Partielle afledede af funktioner af 3 eller flere variable defineres ganske tilsvarende.*

Eksempel 40 *Lad f være givet ved forskriften*

$$f(x,y) = x^2 e^{-x+2y}$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Lad $(a,b) \in R^2$. Da funktionen $x \mapsto x^2 e^{-x+2b}$ åbenbart er differentiabel hvorsomhelst og derfor også i a, har f en partiel afledet m.h.t. x i (a,b), og denne er givet ved

$$f_x(a,b) = 2ae^{-a+2b} - a^2 e^{-a+2b}$$

Da ligeledes funktionen $y \mapsto a^2 e^{-a+2y}$ er differentiabel hvorsomhelst og derfor også i b, har f en partiel afledet m.h.t. y i (a,b), og denne er givet ved

$$f_y(a,b) = 2a^2 e^{-a+2b}$$

Vi har altså vist, at f har partielle afledede overalt i R^2 og at disse er givet ved

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(2x - x^2\right) e^{-x+2y} \\ f_y(x,y) &= 2x^2 e^{-x+2y} \end{aligned}$$

Når som i eksemplet ovenfor $f_x(x,y)$ eller $f_y(x,y)$ eksisterer for alle (x,y) i en eller anden mængde S, så er en funktion f_x eller f_y dermed defineret i S. Som for enhver anden reel funktion af 2 variable kan vi derfor spørge om f_x eller f_y har partielle afledede m.h.t. x og y i et punkt $(a,b) \in S$. Er dette tilfældet, siger vi, at f har en partiel afledet af anden orden. Fire forskellige partielle afledede af anden orden kan komme på tale: Hvis f_x har en partiel afledet m.h.t. x i (a,b) og denne lig med p så vil vi sige, at $f_{xx}(a,b)$ eksisterer og er lig med p. Hvis f_x har en partiel afledet m.h.t. y i (a,b) og denne lig med q så vil vi sige, at $f_{xy}(a,b)$ eksisterer og er lig med q. Hvis f_y har en partiel afledet m.h.t. x i (a,b) og denne lig med r så vil vi sige, at $f_{yx}(a,b)$ eksisterer og er lig med r. Hvis f_y har en partiel afledet m.h.t. y i (a,b) og denne lig med s så vil vi sige, at $f_{yy}(a,b)$ eksisterer og er lig med s.

De tilsvarende betegnelser, når der bruges tegnet ∂, er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Man bedes bemærke rækkefølgen af x og y. Idéen i den hér benyttede rækkefølge er, at det sidst tilkomne symbol står yderst. Anderledes sagt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}$$

Det skal dog allerede nu siges, at en sætning nedenfor siger, at under meget generelle omstændigheder er de "blandede" afledede ens, altså $f_{xy} = f_{yx}$.

Eksempel 41 *Lad f være givet ved forskriften*

$$f(x,y) = x^2 e^{-x+2y}$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Vi fandt ovenfor, at

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(2x - x^2\right) e^{-x+2y} \\ f_y(x,y) &= 2x^2 e^{-x+2y} \end{aligned}$$

Disse to nye funktioner af to variable har åbenbart selv partielle afledede m.h.t. både x og y. Vi finder

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (2-2x)e^{-x+2y} - \left(2x - x^2\right)e^{-x+2y} = \left(2 - 4x + x^2\right)e^{-x+2y} \\ f_{xy}(x,y) &= 2\left(2x - x^2\right)e^{-x+2y} = 2x(2-x)e^{-x+2y} \\ f_{yx}(x,y) &= 4xe^{-x+2y} - 2x^2 e^{-x+2y} = 2x(2-x)e^{-x+2y} \\ f_{yy}(x,y) &= 4x^2 e^{-x+2y} \end{aligned}$$

Vi observerer, at $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ for alle $(x,y) \in R^2$ i overensstemmelse med den følgende sætning.

Sætning 42 *Antag, at f har kontinuerte partielle afledede af første orden i en omegn U af (a,b). Antag videre, at f_{xy} eksisterer i U og er kontinuert i punktet (a,b). Så eksisterer $f_{yx}(a,b)$ og er lig med $f_{xy}(a,b)$.*

Bevis. Vi kan antage, at U er en cirkelskive med centrum i (a,b) og radius r. Lad for ethvert (h,k) med $\|(h,k)\| < r$ funktionen F være givet ved

$$F(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

Lad for givet k funktionen g være givet ved

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$$

for alle x med $|x-a|<r$. Vi har da, at $F(h,k)=g(a+h)-g(a)$. Middelværdisætningen kan anvendes på g, og vi får

$$\begin{aligned} F(h,k) &= g(a+h)-g(a)=g'(\xi)\,h \\ &= (f_x(\xi,b+k)-f_x(\xi,b))\,h \end{aligned}$$

hvor ξ ligger mellem a og $a+h$, d.v.s. at $|\xi-a|<|h|$. Bemærk, at ξ afhænger af både h og k. Da $f_x(\xi,y)$ er en differentiabel funktion af y (idet jo f_{xy} eksisterer) kan vi bruge middelværdisætningen igen. Vi får

$$\begin{aligned} F(h,k) &= (f_x(\xi,b+k)-f_x(\xi,b))\,h \\ &= f_{xy}(\xi,\eta)\,hk \end{aligned}$$

hvor η ligger mellem b og $b+k$, d.v.s. at $|\eta-b|<|k|$. Bemærk også her, at η afhænger af både h og k.

Vi skal vise, at

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h}=f_{xy}(a,b)$$

Lad derfor $\varepsilon>0$ være givet. Da f_{xy} er kontinuert, findes der et $\delta>0$, så

$$|f_{xy}(x,y)-f_{xy}(a,b)|<\varepsilon$$

når blot $\|(x-a,y-b)\|<\delta$. Derfor har vi, at

$$|F(h,k)-f_{xy}(a,b)\,hk|<\varepsilon\,|hk|$$

når blot $\|(h,k)\|<\delta$.

Vi har, at

$$\lim_{k\to 0}\frac{F(h,k)}{k}=f_y(a+h,b)-f_y(a,b)$$

Derfor følger af uligheden ovenfor, at

$$|f_y(a+h,b)-f_y(a,b)-f_{xy}(a,b)\,h|\le\varepsilon\,|h|$$

når blot $|h|<\delta$. Heraf fås åbenbart

$$\left|\frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h}-f_{xy}(a,b)\right|\le\varepsilon$$

når blot $|h|<\delta$. Hermed er beviset ført. ■

Eksempel 43 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2} & for \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & for \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f har åbenbart kontinuerte partielle afledede af vilkårlig høj orden i $R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vi undersøger punktet $(0,0)$. For $(x,y) \neq (0,0)$ fås

$$f_x(x,y) = \frac{x^2 y \left(x^2 + 3y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

For at undersøge, om f har en partiel afledet m.h.t. x i $(0,0)$ betragter vi differenskvotienten

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$$

Altså fås, at f har en partiel afledet m.h.t. x i $(0,0)$, og at denne er $f_x(0,0) = 0$. Tilsvarende finder vi for $(x,y) \neq (0,0)$, at

$$f_y(x,y) = \frac{x^3 \left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Af differenskvotienten

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

fås, at f har en partiel afledet m.h.t. y i $(0,0)$, og at denne er $f_y(0,0) = 0$. Vi undersøger nu, om f har blandede partielle afledede f_{xy} og f_{yx} i punktet $(0,0)$. Af differenskvotienten

$$\frac{f_x(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

ses, at f_x har en partiel afledet m.h.t. y i $(0,0)$, og at denne er $f_{xy}(0,0) = 0$. Tilsvarende ses det af differenskvotienten

$$\frac{f_y(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{x-0}{x} = 1$$

at f_y har en partiel afledet m.h.t. x i $(0,0)$, og at denne er $f_{yx}(0,0) = 1$. Vi har altså her et eksempel på, at $f_{xy} \neq f_{yx}$. M.h.t. forudsætningerne i sætningen ovenfor, kan det let vises, at f_x og f_y begge er kontinuerte også i $(0,0)$. Det eneste der mangler må derfor være, at ingen af de to blandede afledede er kontinuerte i $(0,0)$. Dette eftervises da også let nok ved en konkret regning, som vi dog springer over.

Kapitel 2

Planintegralet

2.0.6 Definition af planintegralet

Vi minder kort om det sædvanlige Riemann-integrals definition:

Definition 44 *Lad f være en funktion defineret på intervallet $[a,b]$, hvor a og b er tal (altså ikke hverken $\pm\infty$). Funktionen f kaldes integrabel på $[a,b]$, hvis der findes et tal q, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling $(x_i)_{i=0}^{n}$, med $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, så for alle valg af tal $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gælder*

$$q - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < q + \varepsilon$$

Tallet q kaldes da integralet og betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

Riemann-integralet har sit navn efter den tyske matematiker Bernhard Riemann, 1826-1866. Idéen med definitionen af integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, er at dette med rimelighed skal kunne *tolkes* som arealet under grafen for f og over x-aksen (når iøvrigt grafen ligger over x-aksen).

Lad nu f være en reel funktion af to variable defineret i en delmængde S af planen (R^2). Vi skal nu definere planintegralet

$$\int_S f(x,y)\,dA$$

så det med rimelighed kan *tolkes* som rumfanget under grafen for f og over xy-planen (når iøvrigt grafen ligger over xy-planen). Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ blev i det éndimensionale tilfælde defineret som et integral over et interval $[a,b]$. Til dette svarer i det todimensionale tilfælde et akseparallelt rektangel $S = [a,b] \times [c,d]$. En definition, der kun omfatter planintegraler over akseparallelle rektangler er imidlertid for indskrænket. Vi har behov for at integrere over mere generelle områder, eksempelvis cirkelskiver. Lad os dog begynde med at give en definition af planintegralet over et akseparallelt rektangel.

Definition 45 *Ved en inddeling af rektanglet* $D = [a, b] \times [c, d]$ *forstås en opdeling af* D *i endeligt mange akseparalle rektangler opnået ved inddelinger af hver af intervallerne* $[a, b]$ *og* $[c, d]$*. Dvs. hvis* $[a, b]$ *er inddelt ved* $(x_i)_{i=0}^n$, *med* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$*, og hvis* $[c, d]$ *er inddelt ved* $(y_i)_{i=0}^m$, *med* $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$*, så består inddelingen af rektanglerne* $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *og* $j = 0, 1, \ldots, m-1$*. Vi har* $D = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{m-1} D_{ij}$.

Bemærkning 46 *Ved denne definition er inddelingen givet ved en dobbeltnummerering* D_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *og* $j = 0, 1, \ldots, m-1$*. Vi kan ligeså godt tænke os de enkelte delrektangler enkeltnummereret* $D_1, D_2, \ldots, D_N$*. Rækkefølgen vil være ligegyldig. Dermed har vi* $D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$

Definition 47 *Lad* f *være en reel funktion defineret på rektanglet* $D = [a, b] \times [c, d]$, *hvor* a, b, c *og* d *er tal (altså ikke hverken* $\pm\infty$*). Funktionen* f *kaldes integrabel på* D*, hvis der findes et tal* q*, så der til ethvert* $\varepsilon > 0$*, findes en inddeling* $(D_i)_{i=1}^n$ *i akseparallelle rektangler, så for alle valg af punkter* $(s_i, t_i) \in D_i$ *gælder*

$$q - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(s_i, t_i)\, A(D_i) < q + \varepsilon$$

hvor $A(D_i)$ *betegner arealet af rektanglet* D_i*. Tallet* q *kaldes da integralet (planintegralet) og betegnes med* $\int_D f(x, y)\, dA$*.*

Bemærkning 48 *Ofte bruges betegnelsen* $\iint_D f(x, y)\, dA$ *i stedet for* $\int_D f(x, y)\, dA$*. Men da* D *er givet som et område i planen, skulle der ikke være nogen muligheder for misforståelser. Slutningen af symbolet, altså* dA*, hælper os til at huske, at planintegralet er en slags grænseværdi for summer af produkter* $f(s_i, t_i)\, a(D_i)$*. Når* $f(s_i, t_i) > 0$ *er* $f(s_i, t_i)\, a(D_i)$ *rumfanget af et retvinklet parallelepipedum (en kasse) af højde* $f(s_i, t_i)$ *og med grundflade* D_i*. Derfor er en fortolkning af* $\int_D f(x, y)\, dA$ *som rumfanget under grafen for* f *og over* D *i xy-planen (når* $f(x, y) \geq 0$*) rimelig.*

Af hensyn til sætningen om reduktion af planintegralet til et dobbeltintegral giver vi også definition af integrabilitet ved over- og undersummer. Først definerer vi over og undersummer svarende til en inddeling.

Definition 49 *Lad* $P_D = (D_i)_{i=1}^n$ *være en inddeling af* $D = [a, b] \times [c, d]$ *i akseparallelle rektangler. Lad* $A(D_i)$ *betegne arealet af rektanglet* D_i, $m(D_i)$ *infimum (største undertal) for* f *på* D_i *og* $M(D_i)$ *supremum (mindste overtal) for* f *på* D_i*. Ved undersummen for* f *svarende til inddelingen* P_D *forstås*

$$s(P_D) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i)\, A(D_i)$$

Ved oversummen for f *svarende til inddelingen* P_D *forstås tilsvarende*

$$S(P_D) = \sum_{i=1}^{n} M(D_i)\, A(D_i)$$

Definition 50 *Lad f være en begrænset reel funktion defineret på rektanglet $D = [a, b] \times [c, d]$, hvor a, b, c og d er tal (altså ikke hverken $\pm\infty$). Funktionen f kaldes integrabel på D, hvis der findes et tal q, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling $P_D = (D_i)_{i=1}^n$ i akseparallelle rektangler, så*

$$q - \varepsilon < s(P_D) \leq S(P_D) < q + \varepsilon$$

Tallet q kaldes da integralet (planintegralet) og betegnes med $\int_D f(x, y)\, dA$.

Eksempel 51 *Lad f være den konstante funktion $f(x, y) = 3$ for alle $(x, y) \in D = [-2, 3] \times [1, 4]$. Da enhver inddeling $(D_i)_{i=1}^n$ af D og ethvert valg af punkter $(s_i, t_i) \in D_i$ giver*

$$\sum_{i=1}^n f(s_i, t_i)\, A(D_i) = 3 \cdot 15 = 45$$

er f åbenbart integrabel på D med integral 45.

Bemærkning 52 *Resultatet i eksemplet generaliseres umiddelbart til påstanden, at en konstant k er integrabel på et akseparallelt rektangel D med integral*

$$\int_D k dA = k \cdot A(D)$$

Specielt har vi, når $k = 1$, at $\int_D dA = A(D)$. I sin generaliserede form, hvor D ikke længere er et rektangel, vil dette resultat senere blive brugt til arealbestemmelse.

Vi giver nu definitionen af integrabilitet over områder i planen, der ikke er akseparallelle rektangler. Men først definerer vi indikatorfunktionen for en mængde i planen:

Definition 53 *Lad $S \subseteq R^2$: Ved indikatorfunktionen 1_S for mængden S forstås funktionen givet ved*

$$1_S(x, y) = \begin{cases} 1 & for \quad (x, y) \in S \\ 0 & for \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

Hvis funktionen f er defineret på S defineres f_S tilsvarende ved

$$f_S(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & for \quad (x, y) \in S \\ 0 & for \quad (x, y) \notin S \end{cases}$$

Bemærkning 54 *Hvis f er defineret overalt i R^2, så har vi $f_S = f \cdot 1_S$. Indikatorfunktionen kan naturligvis også defineres for delmængder af R.*

Definition 55 *Lad $S \subset R^2$ være en begrænset mængde, og lad f være en reel funktion defineret på S. Lad D være et akseparallelt rektangel, der omslutter S, altså $S \subseteq D$. Hvis f_S er integrabel i D, vil vi sige, at f er integrabel i S, og vi sætter*

$$\int_S f(x, y)\, dA = \int_D f_S(x, y)\, dA$$

Bemærkning 56 *Det er vigtigt (men heldigvis også let) at overbevise sig om, at et vilkårligt akseparallelt rektangel $D \supseteq S$ vil give samme resultat, som et vilkårligt andet. Dermed indses også, at den nye definition ikke er i konflikt med den gamle, altså hvis S faktisk er et akseparallelt rektangel, så fås det gamle resultat.*

2.0.7 Arealbegrebet. Jordanindhold.

Definition 57 *Lad S være en begrænset mængde i planen. Hvis den konstante funktion $(x, y) \longmapsto 1$ er integrabel på S, så vil vi sige, at S er målelig (eller "har et Jordan-indhold" eller "har et areal"). Målet (arealet, Jordan-indholdet) sættes til*

$$A(S) = \int_S 1dA$$

Denne definition af målelighed og areal kan mere direkte formuleres således:

Definition 58 *(Direkte definition af areal) Lad S være en begrænset delmængde af R^2. Lad D være et akseparallelt rektangel, der omslutter S, altså $S \subseteq D$. Mængden S kaldes målelig, hvis der findes et tal a, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling $(D_i)_{i=1}^n$ af D i akseparallelle rektangler, så*

$$a - \varepsilon < \sum_{D_i \subseteq S} A(D_i) \leq \sum_{D_i \cap S \neq \emptyset} A(D_i) < a + \varepsilon$$

hvor $A(D_i)$ betegner det sædvanlige areal af rektanglet D_i. Tallet a kaldes da arealet af S.

Sætning 59 *Lad S være en begrænset delmængde af R^2. Lad D være et akseparallelt rektangel, der omslutter S, altså $S \subseteq D$. Mængden S er målelig, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling $(D_i)_{i=1}^n$ af D i akseparallelle rektangler, så*

$$\sum_{D_i \cap \partial S \neq \emptyset} A(D_i) < \varepsilon$$

hvor ∂S betegner randen af S.

Bevis. Ikke svært, men udelades. ∎

Bemærkning 60 *Da $\partial(\partial S) = \partial S$, ses det let, at S er målelig, hvis og kun hvis ∂S er målelig. I bekræftende fald er $A(\partial S) = 0$. Bemærk altså, at hvis randen af S overhovedet har et areal, så er det nul.*

Bemærkning 61 *En nulmængde er en mængde M, for hvilken der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer en overdækning af et højst tælleligt antal akseparallelle rektangler U_i med samlet areal mindre end ε, altså $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq M$ og $\sum_{i=1}^{\infty} A(U_i) < \varepsilon$. Der gælder følgende sætning (Lebesgue): En begrænset funktion f defineret på en begrænset mængde S er Riemann-integrabel på S, hvis og kun hvis diskontinuitetspunkterne for funktionen f_S udgør en nulmængde. Af denne sætning følger,* *at en mængde S er målelig, hvis og kun hvis randen ∂S er en nulmængde. Dette resultat er lettere at bruge end resultatet nævnt i bemærkningen ovenfor. En målelig mængde med mål nul er selvfølgelig en nulmængde, men en nulmængde behøver ikke være målelig. Det er én af svaghederne ved det her indførte målbegreb.*

Sætning 62 *Lad S være en begrænset delmængde af R^2. Lad D være et akseparallelt rektangel, der omslutter S, altså $S \subseteq D$. Mængden S er målelig og har mål nul, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes en inddeling $(D_i)_{i=1}^n$ af D i akseparallelle rektangler, så*

$$\sum_{D_i \cap S \neq \emptyset} A(D_i) < \varepsilon$$

Eksempel 63 *Ethvert ret liniestykke i R^2 ses let at have mål nul.*

Eksempel 64 *Enhver mængde bestående af endeligt mange punkter har mål nul.*

Sætning 65 *Lad g: $[a,b] \to R$. Så er g integrabel på $[a,b]$, hvis og kun hvis grafen $G = \{(x,y) \,|y = g(x) \wedge x \in [a,b]\}$ har mål nul.*

Korollar 66 *Lad g: $[a,b] \to R$ være kontinuert.Så har grafen $G = \{(x,y) \,|y = g(x) \wedge x \in [a,b]\}$ mål nul.*

Sætning 67 *Lad g: $[a,b] \to R$ og antag, at $g(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Så er g integrabel på $[a,b]$, hvis og kun hvis mængden $S = \{(x,y) \,|0 \leq y \leq g(x) \wedge x \in [a,b]\}$ er målelig. I bekræftende fald er målet*

$$A(S) = \int_a^b g(x)\,dx$$

Eksempel 68 *Lad S bestå af de punkter i kvadratet $D = [0,1] \times [0,1]$, der har rationale koordinater. Vi vil vise, at S ikke er målelig. Vi gør dette ved at vise, at 1_S ikke er integrabel på D. Lad $(D_i)_{i=1}^n$ være en inddeling af D. Ethvert delrektangel D_i i inddelingen vil indeholde punkter fra S og også punkter fra $\complement S$. Ved udelukkende at vælge $(s_i, t_i) \in S$ fås*

$$\sum_{i=1}^n 1_S(s_i, t_i) A(D_i) = \sum_{i=1}^n A(D_i) = A(D) = 1$$

Ved udelukkende at vælge $(s_i, t_i) \in \complement S$ fås

$$\sum_{i=1}^n 1_S(s_i, t_i) A(D_i) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot A(D_i) = 0$$

Altså kan 1_S ikke være integrabel på D og S er derfor ikke målelig. Ikke desto mindre er S faktisk en nulmængde efter definitionen givet i bemærkningen ovenfor. Dette er i og for sig ikke så svært at vise, men vi udelader beviset.

2.0.8 Egenskaber ved planintegralet

Sætning 69 *Lad f og g være integrable på S, så er $f+g$ integrabel med*

$$\int_S (f(x,y) + g(x,y))\, dA = \int_S f(x,y)\, dA + \int_S g(x,y)\, dA$$

og hvis k er en konstant, så er kf integrabel og

$$\int_S kf(x,y)\, dA = k \int_S f(x,y)\, dA$$

Sætning 70 *Hvis f og g er integrable på S, og opfylder $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in S$, så gælder*

$$\int_S f(x)\, dx \leq \int_S g(x)\, dx$$

Specielt gælder, hvis k er en konstant, S er målelig, og $f(x) \leq k$ for alle $x \in S$, at

$$\int_S f(x)\, dx \leq kA(S)$$

Korollar 71 *Lad $f\colon S \subset R^2 \to R$ være en begrænset funktion og S en målelig mængde med mål nul. Så er f integrabel på S med integral lig med 0.*

Sætning 72 *Lad $f\colon S \subset R^2 \to R$ være begrænset og kontinuert i $S \backslash M$, med S begrænset og målelig, og med M målelig med mål nul. Så er f integrabel på S.*

Sætning 73 *Lad $f\colon S \subset R^2 \to R$ være integrabel på S, og lad S_1 være en målelig delmængde af S. Så er f integrabel på S_1.*

Sætning 74 *Lad $S = S_1 \cup S_2$, hvor S_1 og S_2 er målelige, og hvor $A(S_1 \cap S_2) = 0$. Så er f integrabel på S, hvis og kun hvis f er integrabel på både S_1 og S_2. I bekræftende fald gælder*

$$\int_S f(x,y)\, dA = \int_{S_1} f(x,y)\, dA + \int_{S_1} f(x,y)\, dA$$

Reduktion af planintegralet til et dobbeltintegral

Sætning 75 *Lad D være rektanglet $D = [a,b] \times [c,d]$ og antag, at f er integrabel på D. Antag videre, at funktionen $y \longmapsto f(x,y)$ for ethvert fastholdt $x \in [a,b]$ er integrabel på $[c,d]$. Så er funktionen $x \longmapsto \int_c^d f(x,y)\, dy$ integrabel på $[a,b]$ og vi har*

$$\int_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

Bevis. Lad P_D være en inddeling af rektanglet $D = [a,b] \times [c,d]$ i akseparallelle rektangler $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, hvor $i = 1, 2, \ldots, n$ og $j = 1, 2, \ldots, m$. Hermed foreligger der også en inddeling af intervallet $[a,b]$, nemlig $P_{[a,b]}$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ og ligeledes af intervallet $[c,d]$, nemlig $P_{[c,d]}$: $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$. Sæt

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

For $x \in [x_{i-1}, x_i]$ har vi

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq \sum_{j=1}^{m} M_f(D_{ij})(y_j - y_{j-1})$$

hvor $M_f(D_{ij})$ betegner supremum for f på rektanglet D_{ij}. Dermed har vi også

$$M_g([x_{i-1}, x_i]) \leq \sum_{j=1}^{m} M_f(D_{ij})(y_j - y_{j-1})$$

hvor $M_g([x_{i-1}, x_i])$ betegner supremum for g på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Heraf følger

$$S_g\left(P_{[a,b]}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_g([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} M_f(D_{ij})\,A(D_{ij}) = S_f(P_D)$$

hvor $S_g\left(P_{[a,b]}\right)$ og $S_f(P_D)$ betegner oversummer for g og f svarende til inddelingerne $P_{[a,b]}$ og $S_f(P_D)$, henholdsvis.På samme måde vises, at der om undersummerne gælder

$$s_f(P_D) \leq s_g\left(P_{[a,b]}\right)$$

Hermed har vi altså for enhver inddeling P_D med dertil hørende inddeling $P_{[a,b]}$, at

$$s_f(P_D) \leq s_g\left(P_{[a,b]}\right) \leq S_g\left(P_{[a,b]}\right) \leq S_f(P_D)$$

Lad nu $\varepsilon > 0$. være givet. Når f er integrabel på D med integral q findes der en inddeling P_D af D, så

$$q - \varepsilon < s_f(P_D) \leq S_f(P_D) < q + \varepsilon$$

For den dertil svarende inddeling $P_{[a,b]}$ gælder derfor

$$q - \varepsilon < s_g\left(P_{[a,b]}\right) \leq S_g\left(P_{[a,b]}\right) < q + \varepsilon$$

Hermed er vist, at g er integrabel på $[a,b]$ med integral q, hvilket vi skulle vise.
■

Sætning 76 *Lad $g_1, g_2\colon [a,b] \to R$ begge være kontinuerte. Antag, at $g_1(x) < g_2(x)$ for alle $x \in]a,b[$. Lad S være givet ved*

$$S = \{(x,y) \,|g_1(x) \le y \le g_2(x) \wedge x \in [a,b]\}$$

Lad $f\colon S \to R$ være en begrænset funktion, som er kontinuert i det indre af S. Så er f integrabel på S, og vi har

$$\int_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Bevis. Lad D være et akseparallelt rektangel, der omslutter S. Vi kan antage det har formen $D = [a,b] \times [c,d]$. Vi skal vise, at f_S er integrabel på D. Men f_S er kontinuert i alle punkter af D med evt. undtagelse af punkterne på kurverne $y = g_1(x), y = g_2(x)$, og de lodrette liniestykker $x = a$ og $x = b$. Disse kurver udgør en målelig mængde med mål nul. Derfor er f_S integrabel på D. Ifølge den foregående sætning har vi dermed

$$\begin{aligned}
\int_S f(x,y)\,dA &= \int_D f_S(x,y)\,dA \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d f_S(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx
\end{aligned}$$

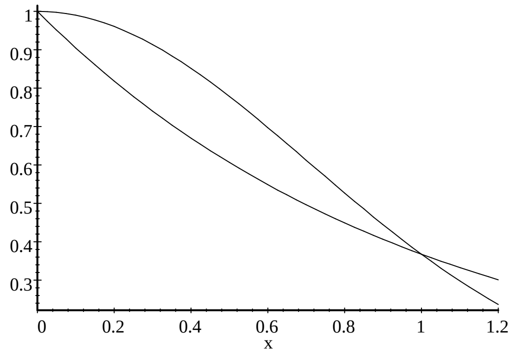
■

Eksempel 77 *Lad S være det begrænsede område i planen, der afgrænses af kurverne $y = e^{-x}$ og $y = e^{-x^2}$. Vi vil finde planintegralet*

$$\int_S \frac{x}{y} dA$$

De to kurver skærer hinanden i punkterne $(0,1)$ og $\left(1, e^{-1}\right)$. Det omtalte område er altså $S = \left\{(x,y) \,\middle|\, e^{-x} \le y \le e^{-x^2} \wedge 0 \le x \le 1\right\}$.

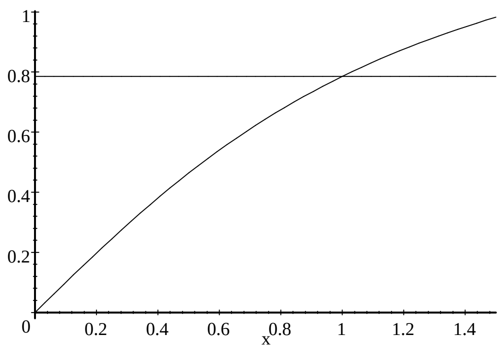
e^{-x}, e^{-x^2}



Se figuren. Vi finder derfor

$$\begin{aligned}\int_S \frac{x}{y} dA &= \int_0^1 \left(\int_{e^{-x}}^{e^{-x^2}} \frac{x}{y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[\ln y\right]_{e^{-x}}^{e^{-x^2}} dx = \int_0^1 x\left(-x^2+x\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-x^3+x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Eksempel 78 *Lad S være det begrænsede område i planen, der afgrænses af kurven $y = \arctan x$ samt af linierne $y = \frac{\pi}{4}$ og $x = 0$.*
$\arctan x, \frac{\pi}{4}$



Se figuren. Vi vil finde planintegralet

$$\int_S \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dA$$

Vi finder, da $S = \left\{(x,y) \,\middle|\, \arctan x \le y \le \frac{\pi}{4} \wedge 0 \le x \le 1\right\}$, at

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dA &= \int_0^1 \left(\int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \sin \pi x \left[\tan y\right]_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} dx = \int_0^1 (1-x) \sin \pi x dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{1}{\pi^2}\left(\sin \pi x - \pi x \cos \pi x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

Der er naturligvis en version af reduktionssætningerne, hvor rollerne for x og y er byttet om. Vi prøver eksemplet ovenfor med rollerne ombyttede.

Eksempel 79 *Lad igen S være det begrænsede område i planen, der afgrænses af kurven $y = \arctan x$ samt af linierne $y = \frac{\pi}{4}$ og $x = 0$. Vi vil finde planintegralet*

$$\int_S \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dA$$

Vi finder, da S også kan beskrives som $S = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le \tan y \wedge 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$, at

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\tan y} \frac{\sin \pi x}{\cos^2 y} dx\right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y} \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x\right]_0^{\tan y} dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y} \left(1 - \cos\left(\pi \tan y\right)\right) dy
\end{aligned}$$

Dette integral kan klares ved substitutionen $t = \pi \tan y$, hvorved $dt = \pi \frac{1}{\cos^2 y} dy$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y} \left(1 - \cos\left(\pi \tan y\right)\right) dy &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left(1 - \cos t\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left[t - \sin t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Vi fik selvfølgelig (eller skal vi sige heldigvis?) det samme som ovenfor. Pointen er dog, at de to måder, hvorpå planintegralet kan udregnes, tit giver anledning til regninger af forskellig sværhedsgrad.

Eksempel 80 *Der ønskes en udregning af følgende dobbeltintegral*

$$q = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}} \sqrt{1 - x^3} dx\right) dy$$

Vores umiddelbare problem er bestemmelsen af en stamfunktion til $\sqrt{1 - x^3}$. En sådan kan nemlig ikke udtrykkes ved elementære funktioner. Dobbeltintegralet kan imidlertid opfattes som et planintegral over området

$$S = \{(x, y) \,|\, \sqrt{y} \le x \le \sqrt[5]{y} \wedge 0 \le y \le 1\}$$

Dette område i planen kan også beskrives således (her hjælper en tegning af området!)

$$S = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^5 \le y \le x^2 \wedge 0 \le x \le 1\right\}$$

Hermed fås

$$\begin{aligned} q &= \int_S \sqrt{1-x^3}dA = \int_0^1 \left(\int_{x^5}^{x^2} \sqrt{1-x^3}dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^3} \right]_{x^5}^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2-x^5\right)\sqrt{1-x^3}dx \\ &= \int_0^1 x^2\left(1-x^3\right)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{3}\int_1^0 t^{\frac{3}{2}}dt \\ &= -\frac{2}{15}\left[t^{\frac{5}{2}}\right]_1^0 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Bemærkning 81 *Der er mange, der bruger skrivemåden*

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

når de mener

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Fordelen er, at parenteserne undgås, og at man umiddelbart kan se hvilken varibel er knyttet til hvilket integraltegn. Parenteserne kan selvfølgelig også udelades uden omplacering af dx*, som følger*

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

Alle 3 skrivemåder må anses for acceptable.

Eksempel 82 *Idet vi (når* $f \geq 0$*) tillader os at opfatte* $\int_S f(x,y)\,dA$ *som rumfanget af det legeme, der ligger under grafen for* f *og over xy-planen, vil vi finde rumfanget af det legeme, der begrænses af to cylindre med samme radius (nemlig 1), og hvis akser skærer hinanden under en ret vinkel. Vi kan tænke os cylinderfladerne givet ved ligningerne* $z^2+x^2=1$ *og* $z^2+y^2=1$*. Rumfanget kan findes ved at observere, at legemet kan opdeles i 16 dele med samme rumfang. Adskillelsen mellem disse er givet ved koordinatplanerne og ved skæringen mellem cylinderfladerne: Med* $x,y,z \geq 0$ *fås* $z=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-y^2} \Longleftrightarrow y=x$*. Det totale rumfang er da 16 gange rumfanget af mængden* $\left\{(x,y,z) \,\middle|\, 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2} \wedge x \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1\right\}$*. Altså fås rumfanget til*

$$\begin{aligned} V &= 16\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}dy \\ &= 16\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y\sqrt{(1-y^2)}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_x^1 dx \\ &= 16\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\arcsin x\right) dx \end{aligned}$$

Et lidt kedeligt integral, som dog nok kan udregnes med lidt flid. Vi prøver istedet omvendt integrationsorden:

$$\begin{aligned} V &= 16\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{1-y^2}dx = 16\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,[x]_0^y\,dy \\ &= 16\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

hvor det sidste integral blev fundet ved substitutionen $t = 1 - y^2$. Bemærk, at rumfanget er større end rumfanget for en kugle med radius 1, som det da også bør være.

Indskud om polære koordinater i planen

I en orienteret plan er givet en orienteret ret linie, en tallinie, tallet 0 svarer til punktet O, også kaldet polen. Lad nu P være et punkt i planen. Antag, at $P \neq O$. Lad L være linien, der går gennem O og P. Linien forsynes med en af de to mulige orienteringer, således at den kan betragtes som en tallinie ligesom polaraksen, ja kan betragtes som en om polen drejet version af polaraksen. De polære koordinater for punktet P består nu af to tal. Det ene er den vinkel θ polaraksen skal drejes (regnet med fortegn) for at falde sammen med L også hvad angår orienteringen. Det andet er det tal r, der aflæses på tallinien L ved P. Derved bliver $|r|$ afstanden fra O til P. På trods af formuleringen "den vinkel ... " er vinklen på ingen måde entydigt bestemt. Er θ og r polære koordinater for P, så er også $\theta + p2\pi$ og r polære koordinater for P, når $p \in Z$. Desuden er også $\theta + \pi + p2\pi$ og $-r$ polære koordinater for P, når $p \in Z$. Polen O tillægges de polære koordinater $r = 0$ og θ vilkårlig.

Ved sammenligning med modulus og argument for komplekse tal er forskellen den, at modulus af et tal z var afstanden fra z til 0, altså et ikke negativt tal. At man ikke her forlanger $r \geq 0$ skyldes, at ligningerne for kurver i polære koordinater ofte får et enklere udseende, når der ikke insisteres på, at r skal være ikke-negativ.

Indlægger man foruden det polære koordinatsystem også et cartesisk (rektangulært) system, hvor polaraksen bruges som førsteakse (abscisseakse, x-akse), så har ethvert punkt P dermed både et sæt cartesiske koordinater (x, y) og et sæt polære koordinater (θ, r). Sammenhængen mellem disse er som følger

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Disse gælder uanset om r er positiv eller negativ. Overgangsformler, der går den anden vej, ser således ud

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ |r| &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

hvor der for den førstes vedkommende forudsættes, at $x \neq 0$. Vil man have et sæt polære koordinater med $r \geq 0$, så har vi

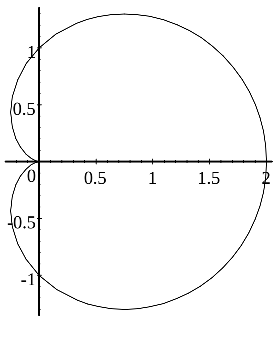
$$\begin{aligned} \theta &= \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & for \quad x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & for \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot sign\,(y) & for \quad x = 0 \end{cases} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

ganske som for modulus og argument for komplekse tal. En formel, der giver en vinkel i intervallet $]-\pi, \pi]$ (svarende til hovedargumentet for komplekse tal) er

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{cases} 2 \arctan \frac{y}{r+x} & for \quad r + x \neq 0 \\ \pi & for \quad r + x = 0 \end{cases} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

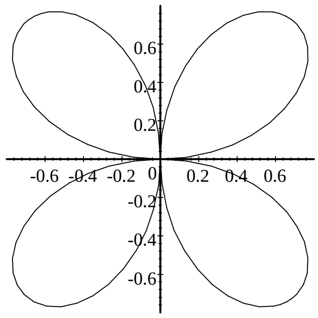
Vi har, at $r+x = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \wedge x \leq 0$. Bemærk, at pga. flertydigheden af polære koordinater, giver disse sidste formler kun et forslag til polære koordinater.

Eksempel 83 *Kurven, der i polære koordinater har ligningen* $r = 1 + \cos\theta$*, kaldes cardioiden. Den er vist på figuren.*
$1 + \cos\theta$



Eksempel 84 *Den firebladede rose har i polære koordinater ligningen* $r = \sin 2\theta$*. Den er vist på figuren. Bemærk, at vi her gør brug af negative værdier for* r*, idet* $\sin 2\theta$ *er negativ f.eks. for* $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$\sin 2\theta$



Eksempel 85 *Ligningen for cardioiden* $r = 1 + \cos\theta$, *der jo er i polære koordinater, kan omskrives til en ligning i cartesiske koordinater. Bemærk, at vi nødvendigvis har, at* $r \geq 0$ *i dette tilfælde, så* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Multipliceres så på begge sider af ligningen med* r, *fås, idet* $x = r\cos\theta$, *at*

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

Efter isolering af kvadratroden og påfølgende kvadrering fås

$$\left(x^2 + y^2 - x\right)^2 = x^2 + y^2$$

Denne ligning er faktisk ækvivalent med den første (man får jo ellers tit falske løsninger ved kvadrering). Fra den sidste ligning isoleres y^2 *let, hvorefter man finder følgende udtryk*

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x}}$$

Alle 4 kombinationer af fortegn skal med. Hver kombination giver sin del af cardioiden. Man må vist indrømme, at den polære repræsentation af kurven er betydeligt simplere!

Eksempel 86 *Ligningen for den firebladede rose* $r = \sin 2\theta$ *kan også omskrives til cartesiske koordinater. Ved brug af formlen* $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ *og samme idé som i eksemplet ovenfor fås*

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$$

Det kan lade sig gøre at isolere y *(brug Maple), men resultatet består af 6 forskellige (og ikke særligt pæne) udtryk. Hvert af disse udtryk svarer til en del af kurven. Kurvens numerisk største* x*-værdier er* $\pm\frac{8}{5\sqrt{5}}$, *hvilket ses ved differentiation af* $x = r\cos\theta = \sin 2\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta$. *To af udtrykkene er reelle i hele området* $-\frac{8}{5\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{8}{5\sqrt{5}}$. *Af de 4 øvrige er 2 reelle og 2 imaginære i området* $0 \leq x \leq \frac{8}{5\sqrt{5}}$. *I området* $-\frac{8}{5\sqrt{5}} \leq x \leq 0$ *bytter de to par roller.*

Eksempel 87 *Parablen med ligningen $y = x^2$ i cartesiske koordinater kan udtrykkes i polære koordinater ved at erstatte x og y med $r\cos\theta$ og $r\sin\theta$, henholdsvis. Løses derefter for r, fås*

$$r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

Eksempel 88 *Kurven med ligningen $y = \arctan x$ i cartesiske koordinater kan udtrykkes i polære koordinater ved*

$$r\sin\theta = \arctan(r\cos\theta)$$

Isolering af r synes ikke at være mulig (Maple kan heller ikke).

Planintegralet i polære koordinater

Sætning 89 *Lad $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ og lad $0 \leq c < d$. Lad D være den mængde i planen, der i polære koordinater er givet ved*

$$D = \{(\theta, r)\,|c \leq r \leq d \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Lad $R = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ være den mængde i θr-planen, der er givet ved samme udtryk som D, men hvor (θ, r) er sædvanlige retvinklede (cartesiske) koordinater. Antag, at f er integrabel på S og at funktionen $\widetilde{f}$ givet ved $\widetilde{f}(\theta, r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ er integrabel på D. Så gælder

$$\int_D f(x, y)\, dA = \int_R r\widetilde{f}(\theta, r)\, dA$$

Hvis også funktionen $r \longmapsto rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ for ethvert fastholdt $\theta \in [\alpha, \beta]$ er integrabel på $[c, d]$, så gælder, at højre side kan erstattes af et dobbeltintegral, således at vi har

$$\int_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_c^d r \cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr \right)$$

Bevis. Vi antager først, at $f(x, y) \geq 0$ for alle $(x, y) \in D$. Lad P_R være en inddeling af R i akseparallelle rektangler $R_{ij} = [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [r_{j-1}, r_j]$, med $i = 1, 2, \ldots, n$ og $j = 1, 2, \ldots, m$. Lad D_{ij} være det til R_{ij} svarende område i xy-planen. Hermed foreligger altså en opdeling af D i områder af form som et stykke dåseananas. Lad m_{ij} og M_{ij} betegne infimum og supremum af f på D_{ij}, henholdsvis. Senere får vi brug for, at så er m_{ij} og M_{ij} også infimum og supremum af $\widetilde{f}$ på R_{ij}, henholdsvis. Så har vi

$$\sum_{i,j} m_{ij} A(D_{ij}) \leq \int_D f(x, y)\, dA \leq \sum_{i,j} M_{ij} A(D_{ij})$$

Vi har $A(D_{ij}) = \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\left(r_j^2 - r_{j-1}^2\right) = \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})(r_j - r_{j-1})(r_j + r_{j-1}) = \frac{1}{2}\Delta\theta_i\Delta r_j(r_j + r_{j-1})$, når $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ og $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$. Hermed har vi, at $r_{j-1}\Delta\theta_i\Delta r_j \leq A(D_{ij}) \leq r_j\Delta\theta_i\Delta r_j$. Derfor fås (da $Mij \geq m_{ij} \geq 0$)

$$\sum_{i,j} m_{ij}r_{j-1}\Delta\theta_i\Delta r_j \leq \int_D f(x,y)\,dA \leq \sum_{i,j} M_{ij}r_j\Delta\theta_i\Delta r_j$$

Lad g være funktionen givet ved $g(\theta,r) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ for alle $(\theta,r) \in R$. Så har vi, at venstre medlem af ulighederne ovenfor er mindre end en undersum s_g for g svarende til den givne inddeling af R, og højre medlem er større end en tilsvarende oversum S_g for g. Forskellem mellem de to sider er, idet $\Delta\theta_i\Delta r_j = A(R_{ij})$, og idet K er en øvre grænse for $|f|$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i,j} M_{ij}r_j\Delta\theta_i\Delta r_j - \sum_{i,j} m_{ij}r_{j-1}\Delta\theta_i\Delta r_j \\
&= \sum_{i,j}(M_{ij}r_j - m_{ij}r_{j-1})A(R_{ij}) \\
&= \sum_{i,j} M_{ij}(r_j - r_{j-1})A(R_{ij}) + \sum_{i,j} r_{j-1}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) \\
&\leq K\min_j(r_j - r_{j-1})\cdot A(R) + d\sum_{i,j}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})
\end{aligned}$$

Da summen

$$\sum_{i,j}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})$$

er forskellen mellem en over- og en undersum for $\widetilde{f}$ svarende til inddelingen af R, og da $\widetilde{f}$ antages integrabel på R, kan vi bestemme en inddeling således, at vi til givet $\varepsilon > 0$ kan gøre denne forskel mindre end $\frac{\varepsilon}{2d}$. Samtidigt kan vi vælge inddelingen, så $\min_j(r_j - r_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2KA(R)}$. Altså findes der en inddeling af R og dermed af D, så

$$0 \leq \sum_{i,j} M_{ij}r_j\Delta\theta_i\Delta r_j - \sum_{i,j} m_{ij}r_{j-1}\Delta\theta_i\Delta r_j < \varepsilon$$

For denne inddeling gælder da også, at

$$S_g - s_g < \varepsilon$$

Dette viser, at g er integrabel på R.. Endvidere fås af de anførte uligheder, at

$$-\varepsilon < \int_R h(\theta,r)\,dA - \int_D f(x,y)\,dA < \varepsilon$$

Men da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, må vi have, at

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_R h(\theta,r)\,dA$$

Altså

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_R rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dA$$

Antag nu, at f ikke nødvendigvis er ikke-negativ. Da f er begrænset kan vi vælge en konstant k, så $f+k \geq 0$. For denne sum gælder resultatet. Altså har vi

$$\int_D (f(x,y)+k)\,dA = \int_R r(f(r\cos\theta, r\sin\theta)+k)\,dA$$

Men heraf fås

$$\int_D f(x,y)\,dA + kA(S) = \int_R rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dA + k\int_R r dA$$

Men vi har

$$\int_R r dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_c^d r dr\right) d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(d^2-c^2\right) d\theta = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(d^2-c^2\right) = A(D)$$

Dermed gælder resultatet

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_R rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dA$$

også uden antagelser om ikke-negativitet. Reduktionen af planintegralet på højre side til et dobbeltintegral kan nu foretages, når forudsætningerne i sætningen herom er opfyldte, altså når funktionen $r \longmapsto rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ for ethvert fastholdt $\theta \in [\alpha,\beta]$ er integrabel på $[c,d]$. ■

Sætning 90 *Lad g_1 og g_2 være reelle kontinuerte funktioner defineret på intervallet $[\alpha,\beta]$, hvor $\beta-\alpha \leq 2\pi$. Antag, at $0 \leq g_1(\theta) < g_2(\theta)$ for alle $\theta \in\,]\alpha,\beta[$. Lad S være den mængde i planen, der i polære koordinater er givet ved*

$$S = \{(\theta,r)\,|g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Antag, at f er en begrænset funktion, der er kontinuert i det indre af S. Så er f integrabel på S, og der gælder

$$\int_S f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\right)$$

Bevis. Lad T være et akseparallelt rektangel, der indeholder S. Randen af S, der jo består af to rette liniestykker og kurverne $r=g_1(\theta)$ og $r=g_2(\theta)$ må have mål nul. At kurverne har mål nul, da g_1 og g_2 er kontinuerte, bør vises, men vi springer det over. Derfor vil f_S være integrabel på T. Altså er f integrabel på S. Lad $\widetilde{S}$ være det område i planen, der er givet på samme måde som S, men med (θ,r) opfattet som rektangulære koordinater. Lad området D være givet i polære koordinater ved $D = \{(\theta,r)\,|\min g_1 \leq r \leq \max g_2 \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.

Lad R være givet på samme måde, men med (θ, r) opfattet som rektangulære koordinater. Så har vi

$$\begin{aligned}\int_S f(x,y)\,dA &= \int_D f_S(x,y)\,dA = \int_R r f_S(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dA \\ &= \int_{\widetilde{S}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\right)\end{aligned}$$

■

Eksempel 91 *Vi vil udregne planintegralerne* $\int_S y dA$ *og* $\int_S dA$*, hvor* S *er det område i den øvre halvplan, der ligger indenfor cirklen* $x^2+y^2=R^2$ *og i det spidse vinkelrum mellem linierne* $y=\pm x$*. Vi finder, når der bruges polære kordinater, at* S *kan beskrives ved*

$$S = \left\{(\theta, r) \middle| 0 \le r \le R \wedge \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned}\int_S y dA &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^R r\cdot r\sin\theta dr\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^R r^2\sin\theta dr\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\cdot\frac{1}{3}R^3 d\theta = \frac{1}{3}R^3\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}R^3\end{aligned}$$

Det andet integral $\int_S dA = \int_S 1dA = A(S)$*, altså arealet af området. Det kan evt. også udregnes ved integration:*

$$\int_S dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^R r\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}R^2 d\theta = \frac{\pi}{4}R^2$$

i overensstemmelse med, at S *er en kvart cirkelskive.*

Bemærkning 92 *Massen* M *af et legeme* S*, hvis massetæthed er givet pr. arealenhed ved en funktion* ρ*, kan udregnes ved*

$$M = \int_S \rho(x,y)\,dA$$

Tyngdepunktets koordinater (x_T, y_T) *er givet ved*

$$\begin{aligned}x_T &= \frac{1}{M}\int_S x\rho(x,y)\,dA \\ y_T &= \frac{1}{M}\int_S y\rho(x,y)\,dA\end{aligned}$$

Hvis kvartcirklen i eksemplet ovenfor var belagt med en masse med konstant tæthed ρ, så er massen altså $M = \frac{\pi}{4}R^2\rho$, og tyngdepunktets y-koordinat

$$y_T = \frac{1}{M}\int_S y\rho(x,y)\,dA = \frac{\rho}{M}\int_S ydA = \frac{\rho\frac{\sqrt{2}}{3}R^3}{\frac{\pi}{4}R^2\rho} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R$$

Tyngdepunktets x-koordinat må af symmetrigrunde være nul. Bemærk, at (x_T, y_T) ligger i "trekantsdelen" af kvartcirklen.

Eksempel 93 *Lad S være området indenfor cardioiden, der i polære koordinater er givet ved $r = 1 + \cos\theta$. (Tegn kurven!). Vi vil først finde arealet af S. Vi har*

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_S dA = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\cos\theta} rdr\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Antag, at S er belagt med masse med konstant tæthed. Find tyngdepunktets beliggenhed. Af symmetrigrunde er $y_T = 0$. Tyngdepunktets x-koordinat er givet ved

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{M}\int_S x\rho(x,y)\,dA = \frac{2}{3\pi}\int_S xdA \\ &= \frac{2}{3\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\cos\theta} r\cdot r\cos\theta dr\right)d\theta \\ &= \frac{2}{3\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{1+\cos\theta}\cos\theta d\theta = \frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta d\theta \\ &= \frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta\right)d\theta \\ &= \frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)d\theta = \frac{2}{9\pi}\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Eksempel 94 *Vi vil udregne planintegralerne $\int_S \left(x^2 + y^2\right)dA$ og $\int_S dA$, når S består af de fire ens områder indenfor den firebladede rose givet i polære koordinater ved $r = a\sin 2\theta$, hvor $a > 0$. Vi behøver kun at udregne 4 gange integralet over et enkelt af de 4 blade, nemlig det der i polære koordinater er givet ved*

$$\left\{(\theta, r)\,\middle|\, 0 \le r \le a\sin 2\theta \wedge 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Vi finder

$$\begin{aligned}\int_S \left(x^2+y^2\right) dA &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sin 2\theta} r\cdot r^2 dr\right) d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}a^4 \sin^4 2\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{16}a^4\end{aligned}$$

Det andet planintegral er jo arealet. Vi finder

$$\begin{aligned}A(S) &= \int_S dA = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sin 2\theta} r dr\right) d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}a^2 \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}a^2\end{aligned}$$

Bemærkning 95 *Inertimomentet I_z mht. z-aksen for et legeme S, hvis massetæthed pr. arealenhed i xy-planen er givet ved en funktion ρ, kan udregnes ved*

$$I_z = \int_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\, dA$$

Mere generelt er inertimomentet I_L mht. en akse L givet ved

$$I_L = \int_S dist\left((x,y), L\right)^2 \cdot \rho(x,y)\, dA$$

hvor $dist\left((x,y), L\right)$ hér betyder afstanden fra (x,y) til linien L. Hvis i eksemplet ovenfor rosen var belagt med masse med konstant tæthed ρ, så var inertimomentet mht. z-aksen altså $I_z = \frac{3\pi}{16}a^4\rho$, og massen var $M = \frac{\pi}{2}a^2\rho$. Dermed har vi

$$I_z = \frac{3}{8}Ma^2$$

Eksempel 96 *Vi vil udregne integralet*

$$\int_S e^{-x^2-y^2} dA$$

dels, når $S = C_R$, cirkelskiven givet ved $x^2+y^2 \le R^2$, dels når $S = K_a$ er kvadratet $[-a,a]\times[-a,a]$. Vi finder i rektangulære koordinater

$$\begin{aligned}\int_{K_a} e^{-x^2-y^2} dA &= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2} dy\right) dx \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right) dx \\ &= \left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)^2\end{aligned}$$

men har det problem, at en stamfunktion til e^{-x^2} *ikke kan udtrykkes ved elementære funktioner. Vi udregner nu integralet over* C_R *i polære koordinater:*

$$\begin{aligned}\int_{C_R} e^{-x^2-y^2} dA &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2} \right) d\theta = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right)\end{aligned}$$

Med $R = a$ *har vi* $C_R = C_a \subset K_a$. *Med* $R = \sqrt{2}a$ *har vi* $K_a \subset C_{\sqrt{2}a}$. *Derfor har vi*

$$\int_{C_a} e^{-x^2-y^2} dA \leq \int_{K_a} e^{-x^2-y^2} dA \leq \int_{C_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2} dA$$

Bemærk, at $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{-x^2-y^2} dA = \pi$. *Heraf fås af ovenstående uligheder, at*

$$\lim_{a\to\infty} \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

altså, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Resultatet er nyttigt (og velkendt) i sandsynlighedsregning og statistik. Det betyder, at funktionen

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

kan opfattes som en sandsynlighedstæthed i R, *idet* $\phi(x) > 0$ *for alle* $x \in R$ *og*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1$$

Kapitel 3

Differentiabilitet

3.0.9 Definition af differentiabilitet

For en funktion af én variabel er definitionen af differentiabilitet som bekendt følgende.

Definition 97 *Lad f være en reel funktion af én variabel defineret på intervallet I. Lad $a \in I$. Hvis grænseværdien*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer og er lig med tallet A, så siges f at være differentiabel i a med differentialkvotient A.

Definitionen er ækvivalent med følgende:

Definition 98 *Lad f være en reel funktion af én variabel defineret på intervallet I. Lad $a \in I$. Hvis der findes et tal A, så*

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} \to 0$$

for $h \to 0$, så siges f at være differentiabel i a med differentialkvotient A.

Denne definition er igen ækvivalent med følgende:

Definition 99 *Lad f være en reel funktion af én variabel defineret på intervallet I. Lad $a \in I$. Hvis der findes et tal A og en funktion g defineret i omegnen af 0, så*

$$f(a+h) = f(a) + Ah + g(h)\,h$$

og så $g(h) \to 0$ for $h \to 0$, så siges f at være differentiabel i a med differentialkvotient A.

Bemærkning 100 *I ovenstående definition kan leddet $g(h)\,h$ erstattes af leddet $g(h)\,|h|$ uden yderligere ændringer.*

I denne sidste form kommer idéen om linearisering tydeligt frem: For små værdier af $|h|$ er $f(a+h)$ næsten lig med $f(a) + f'(a)\,h$, eller anderledes udtrykt: Når x er tæt på a, så ligner $f(x)$ til forveksling det lineære udtryk $f(a) + f'(a)(x-a)$. Vi vil sige, at $f(a) + f'(a)(x-a)$ er lineariseringen af $f(x)$ omkring punktet a. Som bekendt er $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(a, f(a))$.

Den sidste version af differentiabilitetsdefinitionen benyttes ved generalisering til funktioner af flere variable.

Definition 101 *Lad f være en funktion af to variable defineret i mængden $S \subset R^2$. Lad (a,b) være et indre punkt i S. Hvis der findes en funktion g defineret i en omegn U af $(0,0)$ og to tal α og β, så*

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \alpha h + \beta k + g(h,k)\,\|(h,k)\|$$

for alle $(h,k) \in U$, og hvor funktionen g opfylder

$$g(h,k) \to 0 \quad \text{for } (h,k) \to (0,0),$$

så siges f at være differentiabel i (a,b). Den lineære funktion af de to variable h og k

$$df = \alpha h + \beta k$$

kaldes differentialet af f i punktet (a,b).

3.0.10 Differentiabilitet og eksistens af partielle afledede

Hvad har nu eksistensen af partielle afledede med begrebet differentiabilitet at gøre. Herom gælder:

Sætning 102 *Lad f være differentiabel i (a,b) med differential $df = \alpha h + \beta k$, så har f partielle afledede i (a,b) med $f_x(a,b) = \alpha$ og $f_y(a,b) = \beta$.*

Bevis. Vi har, når f er differentiabel i (a,b) med differential $df = \alpha h + \beta k$, at

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\alpha h + g(h,0)\,|h|}{h} = \alpha + g(h,0)\,\frac{|h|}{h}$$

der har grænseværdien α for $h \to 0$, da $g(h,0) \to 0$ for $h \to 0$, og da $\frac{|h|}{h} = \pm 1$. Altså eksisterer $f_x(a,b)$ og er lig med α. At $f_y(a,b)$ eksisterer og er lig med β følger på ganske analog vis. ■

Differentialet for f i punktet (a,b) er altså

$$df = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

Oftest bruges i stedet for (h, k) variabelnavnene (dx, dy), der bl.a. har den fordel, at man kan se, hvilke navne de oprindelige variable (x, y) har. Med dette valg får differentialet følgende udseende:

$$df = f_x(a, b)\, dx + f_y(a, b)\, dy$$

Her kommer endnu en version, hvor vi har valgt også at undertrykke referencen til det punkt (a, b), i hvilket differentialet af f tages:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Definitionen af differentiabilitet kan udtrykkes således: $f(x, y)$ kan i nærheden af (a, b) approksimeres godt ved det lineære udtryk $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$. Anderledes sagt: Grafen for f , altså fladen med ligningen $z = f(x, y)$ ligner i nærheden af punktet $(a, b, f(a, b))$ en plan med ligningen

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Denne plan kaldes tangentplanen til grafen i punktet $(a, b, f(a, b))$. Vi skal også kalde udtrykket $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ lineariseringen af $f(x, y)$ omkring punktet (a, b).

Man kunne tro eller håbe, at eksistensen af de to partielle afledede alene var nok til at sikre differentiabilitet. Dette er dog ikke tilfældet, hvilket følgende eksempel viser.

Eksempel 103 *Lad f være givet ved forskriften*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & for \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & for \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Denne funktion har partielle afledede i $(0, 0)$, hvilket ses som følger:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

hvoraf fås $f_x(0, 0) = 1$. Tilsvarende har vi

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0,$$

hvoraf fås $f_y(0, 0) = 0$. Hvis f var differentiabel ville

$$\frac{f(h, h) - hf_x(0, 0) - hf_y(0, 0)}{h} = \frac{g(h, h) \|(h, h)\|}{h} = g(h, h) \frac{|h| \sqrt{2}}{h} \to 0 \textit{ for } h \to 0.$$

Men

$$\frac{f(h, h) - hf_x(0, 0) - hf_y(0, 0)}{h} = \frac{\frac{h}{2} - h}{h} = -\frac{1}{2}$$

for alle $h \neq 0$,så f er ikke differentiabel i $(0, 0)$.

Eksistensen af partielle afledede i en hel omegn af (a, b) sikrer dog differentiabilitet, når blot de partielle afledede er kontinuerte i (a, b). Dette udtrykkes i følgende sætning.

Sætning 104 *Lad f være en funktion af to variable defineret i mængden $S \subset R^2$. Lad (a, b) være et indre punkt i S. Antag, at f er kontinuert og har partielle afledede i en omegn af (a, b). Antag, at disse partielle afledede er kontinuerte i (a, b). Så er f differentiabel i (a, b)..*

Bevis. Vi begynder med at definere g. I $(0, 0)$ sætter vi $g(0, 0) = 0$ og for $(h, k) \neq (0, 0)$, sætter vi $g(h, k)$ til

$$g(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\|(h,k)\|}$$

Vi skal vise, at $g(h, k) \to 0$ for $(h, k) \to (0, 0)$. Lad da $\varepsilon > 0$ være givet. Da både f_x og f_y er kontinuerte i (a, b), fås at der eksisterer et $\delta > 0$, så $\|(h, k)\| < \delta$ sikrer, at $|f_x(a + h, b + k) - f_x(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ og også $|f_y(a + h, b + k) - f_y(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Til et givet (h, k) fås nu af middelværdisætningen, at der findes et tal ξ mellem $a + h$ og a, og et tal η mellem $b + k$ og b, så

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a,b) &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b) \\ &= f_x(\xi, b+k)h + f_y(a,\eta)k \\ &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + [f_x(\xi, b+k) - f_x(a,b)]\,h + [f_y(a,\eta) - f_y(a,b \end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} |g(h,k)| &= \left| \frac{[f_x(\xi, b+k) - f_x(a,b)]\,h + [f_y(a,\eta) - f_y(a,b)]\,k}{\|(h,k)\|} \right| \\ &\leq |f_x(\xi, b+k) - f_x(a,b)| \cdot \frac{|h|}{\|(h,k)\|} + |f_y(a,\eta) - f_y(a,b)| \cdot \frac{|k|}{\|(h,k)\|} \\ &\leq |f_x(\xi, b+k) - f_x(a,b)| + |f_y(a,\eta) - f_y(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

når blot $\|(h, k)\| < \delta$. Hermed er sætningen bevist. ∎

3.0.11 Anvendelser af linearisering

Linearisering anvendes i udstrakt grad. Vi giver nogle eksempler.

Newtons metode for én ligning med én ubekendt

Der er givet en reel funktion f af én variabel. Vi antager, at f er defineret på intervallet I og at f er differentiabel overalt i I. Vi søger løsninger til ligningen $f(x) = 0$. Lad os sige, at vi har en formodning om, at der findes en rod i nærheden af $x_0 \in I$. Hvis vi er virkeligt gode til at gætte, så er $f(x_0) = 0$. Vi antager, at det ikke er tilfældet. Vi lineariserer nu f omkring x_0. Hermed erstattes $f(x)$ med det lineære udtryk $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, der må formodes at være en udmærket erstatning for $f(x)$, når blot vores gæt på en løsning x_0 er tæt på den rigtige løsning, som vi vil kalde α. Ligningen $f(x)=0$ erstattes af ligningen

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

der som løsning nok ikke har α, men formodentlig en løsning, der ligger meget tæt på α. Fordelen ved lineariseringen er, at denne ligning er let at løse. Det er jo en lineær ligning med én ubekendt. Hvis $f'(x_0)\neq 0$, så har den en løsning. Lad os kalde løsningen for x_1. Så har vi

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

og vi formoder, at x_1 ligger meget tæt på α. (Hvis x_1 skulle falde udenfor definitionsintervallet I, så må vi forsøge at forbedre vores gæt x_0). Den næste gode idé er at gentage proceduren: Vi lineariserer nu f omkring x_1 hvorved ligningen $f(x)=0$ erstattes af ligningen

$$f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)=0$$

Hvis $f'(x_1)\neq 0$, så har ligningen en løsning. Den kalder vi x_2, og den er givet ved

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Således fortsættes. Dette lader sig gøre sålænge $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ forbliver indenfor I og sålænge den afledede f' er forskellig fra nul i punkterne $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$. Vi har åbenbart, at x_n og x_{n-1} hænger sammen på følgende måde

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Hvor længe skal vi fortsætte? Forventningen er, at $x_n\to\alpha$ for $n\to\infty$. Hvis dette holder stik, vil x_n efterhånden ikke ændre sig meget i forhold til x_{n-1}, og da man jo regner med et vist antal cifre i sine decimaltal, vil der efterhånden ske det, at tallene faktisk er ens (eller kun afviger på sidste ciffer). Så er det (ihvertfald) tid til at standse. Men ellers kan man standse, når $|x_n-x_{n-1}|$ er mindre end en vis tolerance, der må afhænge af den konkrete opgave. Et andet stopkriterium er: Stands når $|f(x_n)|$ er mindre end en vis tolerance, et ikke urimeligt stopkriterium, da det er $f(x)=0$, vi forsøger at løse.

En betingelse for at talfølgen ("Newton-følgen") $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ faktisk konvergerer mod roden α gives i følgende sætning. Den giver også indsigt i konvergenshastigheden.

Sætning 105 *Lad $\alpha\in I$ være en rod i ligningen $f(x)=0$.*

1. *Hvis f' er kontinuert i α og $f'(\alpha)\neq 0$, så konvergerer talfølgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mod roden α, når blot x_0 vælges tilstrækkeligt tæt på α.*

2. *Hvis f er to gange differentiabel i intervallet I, og hvis $f'(x_0) \neq 0$, så eksisterer der et tal ξ mellem α og x_0, så*

$$x_1 - \alpha = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)} (x_0 - \alpha)^2$$

Bevis. For at bevise påstand (1) vælg til et givet $k \in]0,1[$ et tal $\delta > 0$, så

$$|x - \alpha| < \delta \Longrightarrow |f'(x) - f'(\alpha)| < k\,|f'(\alpha)|$$

Heraf følger, da $|f'(\alpha)| - |f'(x)| \leq |f'(x) - f'(\alpha)|$, at

$$|x - \alpha| < \delta \Longrightarrow |f'(x)| > (1-k)\,|f'(\alpha)| > 0$$

Hermed har vi, når x_0 vælges, så $|x_0 - \alpha| < \delta$, at

$$\begin{aligned} x_1 - \alpha &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \alpha \\ &= \frac{(x_0 - \alpha) f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Udnyt nu, at $f(x_0) = f(x_0) - f(a) = f'(\xi)(x_0 - \alpha)$ for et ξ mellem x_0 og α, så fås

$$x_1 - \alpha = \frac{(x_0 - \alpha)(f'(x_0) - f'(\xi))}{f'(x_0)}$$

Heraf følger

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha| &= |x_0 - \alpha| \frac{|f'(x_0) - f'(\alpha) + f'(\alpha) - f'(\xi)|}{|f'(x_0)|} \\ &\leq |x_0 - \alpha| \frac{|f'(x_0) - f'(\alpha)| + |f'(\alpha) - f'(\xi)|}{|f'(x_0)|} \\ &\leq |x_0 - \alpha| \frac{2k\,|f'(\alpha)|}{(1-k)\,|f'(\alpha)|} = |x_0 - \alpha| \frac{2k}{(1-k)} \end{aligned}$$

Lad os nu antage, at k er valgt så $k < \frac{1}{3}$. Så gælder, at faktoren $q = \frac{2k}{(1-k)} < 1$. Vi finder da, at

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq q\,|x_{n-1} - \alpha| \leq q^2\,|x_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \ldots \leq q^n\,|x_0 - \alpha| \end{aligned}$$

Heraf følger åbenbart, at $|x_n - \alpha| \to 0$ for $n \to \infty$, og det var det vi ville vise.

For at bevise påstand (2) bruger vi Taylors sætning med x_0 som udviklingspunkt. Der eksisterer et tal ξ mellem α og x_0, så

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2$$

Derfor fås, at

$$\begin{aligned}
x_1 - \alpha &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \alpha \\
&= x_0 - \alpha + \frac{f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2}{f'(x_0)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2}{f'(x_0)}
\end{aligned}$$

■

Bemærkning 106 *Når både $f'(\alpha) \neq 0$ og $f''(\alpha) \neq 0$, betyder sætningens anden påstand, at hvis blot x_0 er tæt nok på α, så har vi*

$$x_1 - \alpha \approx k (x_0 - \alpha)^2$$

hvor $k = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$. Når en sådan relation gælder, taler man om kvadratisk konvergens.

Eksempel 107 *Vi vil løse ligningen $x + \ln x = 0$ ved Newtons metode. Ligningen kan også skrives $\ln x = -x$. Denne form er egnet til grafisk løsning uden brug af maskine. Med andre ord: Denne form er egnet til at give os et godt startgæt x_0 for Newtons metode. Skitserer vi kurverne $y = \ln x$ og $y = -x$, ser vi, at disse skærer hinanden for en x-værdi nær $\frac{1}{2}$. Vi sætter $f(x) = x + \ln x$ og bruger $x_0 = \frac{1}{2}$. Vi finder $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, hvormed*

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0 + \ln x_0}{1 + \frac{1}{x_0}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{3} = \frac{1 + \ln 2}{3} \cong 0.56438239351998176981
\end{aligned}$$

Videre fås

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1 + \ln x_1}{1 + \frac{1}{x_1}} \cong 0.56713898771506015697$$

og

$$\begin{aligned}
x_3 &= 0.56714329039936905088 \\
x_4 &= 0.56714329040978387300
\end{aligned}$$

Når der (som her) regnes med 20 betydende cifre, fås $x_5 = x_4$. Vi må derfor anse x_4 for den søgte rod. Når der regnes med 20 betydende cifre, vil en kontroludregning af $f(x_4)$ give 0. Til sammenligning har vi (angivet med 3 betydende cifre), at $f(x_0) = -0.193, f(x_1) = -0.764 \times 10^{-2}, f(x_2) = -0.119 \times 10^{-4}$ og $f(x_3) = -0.288 \times 10^{-10}$. Maple kan løse ligningen eksakt, idet den kender Lamberts W-funktion. Løsningen er LambertW (1), der med 20 betydende cifre

netop er 0.56714329040978387300*, altså det samme som* x_4*.*
Som det tydeligt fremgår, er konvergensen endog særdeles hurtig: Efter fjerde iteration er resultatet ikke til at skelne fra det eksakte, når 20 betydende cifre anvendtes. Den anden afledede af f *er givet ved* $f''(x) = -x^{-2}$*, så*

$$\begin{aligned} x_1 - \alpha &\approx \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_0-\alpha)^2 = \frac{-\alpha^{-2}}{2(1+\alpha^{-1})}(x_0-\alpha)^2 \\ &= \frac{-1}{2\alpha(1+\alpha)}(x_0-\alpha)^2 \cong -.562560\,(x_0-\alpha)^2 \end{aligned}$$

Ved brug af de fundne værdier for x_1, x_2 *og* x_3 *fås:*

$$\begin{aligned} \frac{x_1-\alpha}{(x_0-\alpha)^2} &= -0.612414 \\ \frac{x_2-\alpha}{(x_1-\alpha)^2} &= -0.564469 \\ \frac{x_3-\alpha}{(x_2-\alpha)^2} &= -0.562563 \end{aligned}$$

Der er således god overensstemmelse med sætningen ovenfor.

For hvilke startværdier x_0 *fås en følge* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, der konvergerer mod roden* α*? Dette spørgsmål er i det generelle tilfælde uhyre svært, men i det foreliggende eksempel er svaret ganske enkelt: For alle* $x_0 \in \,]0,e[$*. At øvre grænse er* e *skyldes, at man for* $x_0 = e$ *får* $x_1 = 0$*, og for* $x_0 > e$ *får* $x_1 < 0$*. Regner man komplekst, kan det sjovt nok også gå godt for* $x_0 > e$*, man kan prøve Maple. Lidt mere detaljeret er regningerne:*

$$\begin{aligned} x_1 &> 0 \Longleftrightarrow x_0 - \frac{x_0 + \ln x_0}{1+\frac{1}{x_0}} > 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 - \ln x_0 > 0 \Longleftrightarrow x_0 < e \end{aligned}$$

Desuden har vi, idet vi i tredie trin udnytter, at $\alpha + \ln\alpha = 0$*:*

$$\begin{aligned} x_1 &< \alpha \Longleftrightarrow x_0 - \frac{x_0+\ln x_0}{1+\frac{1}{x_0}} < \alpha \\ &\Longleftrightarrow 1 - \ln x_0 < \alpha\left(1+\frac{1}{x_0}\right) \\ &\Longleftrightarrow 1 - \ln x_0 < -\ln\alpha + \frac{\alpha}{x_0} \\ &\Longleftrightarrow 1 < -\ln\frac{\alpha}{x_0} + \frac{\alpha}{x_0} \end{aligned}$$

Men funktionen g *givet ved* $g(t) = t - \ln t$ *ses let at have egentligt globalt minimum i 1 med værdi 1. Altså gælder udsagnet* $x_1 < \alpha$ *for alle* $x_0 \neq \alpha, x_0 > 0$*. Da* x_1 *let ses at være en voksende funktion af* x_0*, fås altså for alle* $x_0 \in \,]0,e[\,\setminus\{\alpha\}$*,* *at følgen* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *er voksende og holder sig under* α. *Men så må følgen være konvergent. Følgen må nødvendigvis konvergere mod en rod i ligningen* $x + \ln x = 0$. *Men denne ligning har kun én rod, nemlig* α.

Eksempel 108 *Lad* f *være givet ved forskriften*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & for \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & for \quad x < 0 \end{cases}$$

Ligningen $f(x) = 0$ *har åbenbart den entydigt bestemte løsning* $x = 0$. *Funktionen* f *er differentiabel alle andre steder end i 0. Forsøger vi at bruge Newtons metode, får vi, når* $x_0 > 0$, *at*

$$x_1 = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = x_0 - 2x_0 = -x_0$$

Tilsvarende fås, når $x_0 < 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{-\sqrt{-x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{-x_0}}} = x_0 - 2x_0 = -x_0$$

Men dette betyder, at følgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *er lig med* $x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, \ldots$. *Følgen er altså ikke konvergent for nogen startværdi* $x_0 \neq 0$. *Som nævnt er* f *ikke differentiabel i roden, nemlig 0. Så der er ingen modstrid med sætningen ovenfor.*

Eksempel 109 *Definér* g *ved*

$$g(x) = \frac{2x}{1 + |x|}$$

Vi vil løse ligningen $g(x) = 0$ *ved Newtons metode, ikke for at finde løsningen, for den er åbenbart* $x = 0$, *men for at undersøge for hvilke værdier af* x_0 *Newton-følgen konvergerer. Hvis* $x_0 > 0$, *så giver en hurtig udregning, at* $x_1 = -x_0^2$. *Tilsvarende fås, når* $x_0 < 0$, *at* $x_1 = x_0^2$. *Heraf følger åbenbart, at følgen* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *for* $x_0 > 0$ *er givet ved* $x_0, -x_0^2, x_0^4, -x_0^8, x_0^{16}, \ldots$. *Denne følge konvergerer, hvis og kun hvis* $x_0 < 1$ *og grænseværdien er åbenbart 0. Tilsvarende fås, at følgen* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *for* $x_0 < 0$ *er givet ved* $x_0, x_0^2, -x_0^4, x_0^8, -x_0^{16}, \ldots$, *der konvergerer, hvis og kun hvis* $x_0 > -1$. *Alt i alt altså konvergens af Newton-følgen, netop når* $|x_0| < 1$.

Eksempel 110 *Definér* h *udfra funktionerne* f *og* g *fra de to forrige eksempler ved*

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & for \quad |x| < 1 \\ f(x) & for \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Så er h *differentiabel overalt, også i* ± 1. *Newton-følgen er konvergent, hvis og kun hvis* $|x_0| < 1$. *For* $|x_0| \geq 1$ *har vi* $x_1 = -x_0$.

Eksempel 111 *Newtons metode på ligningen* $\sin x = 0$ *giver*

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = x_0 - \tan x_0$$

Med $F(x) = x - \tan x$ *kan relationen skrives* $x_1 = F(x_0)$. *Hvis* I *er et interval, der er symmetrisk om 0 og opfylder, at* $x \in I \wedge x \neq 0 \Longrightarrow |F(x)| < |x|$, *så vil altså Newton-følgen opfylde* $|x_0| > |x_1| > |x_2| > |x_3| > \ldots$. *Men så må følgen af numerisk-værdier konvergere mod et tal* $a \geq 0$. *Da der gælder, at* x *og* $F(x)$ *har modsat fortegn, har vi, at* $|x_n| = -F(|x_{n-1}|)$. *Heraf fås, at* $a = -F(a)$, *hvilket umuliggør, at* $a \neq 0$, *da* $a \in I$, *så* $a \neq 0 \Longrightarrow |F(a)| < a$. *Et maksimalt interval* I *kan bestemmes ved først at løse ligningen* $F(x) = -x$, *d.v.s.* $\tan x = 2x$. *Denne ligning kan kun løses numerisk (se næste eksempel). Den har i intervallet* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *én løsning, nemlig* $r \cong 1.165561185$. *For* $|x| < r$ *gælder netop, at* $|F(x)| < |x|$. *Newtons metode giver altså konvergens mod 0, når* $x_0 \in \left]-r, r\right[$. *For* $x_0 = \pm r$ *er der ikke konvergens, idet Newton-følgen da bliver* $r, -r, r, -r, r, \ldots$ *og* $-r, r, -r, r, -r, \ldots$ *henholdsvis. For* $|x_0| > r$ *er forholdene meget komplicerede, men interessante. Vi kan kun opfordre læseren til at eksperimentere med blyant og papir. Eksempelvis overbevises man let om, at et endog meget fjerntliggende* x_0 *kan have* $x_1 \in \left]-r, r\right[$, *hvorfor Newton-følgen konvergerer mod 0.*

Eksempel 112 *Vi vil finde den løsning til ligningen* $\tan x = 2x$, *der ligger i intervallet* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Vi vælger at omskrive ligningen til*

$$\sin x - 2x \cos x = 0$$

Da $\frac{d}{dx}(\sin x - 2x \cos x) = \cos x - 2\cos x + 2x \sin x = 2x \sin x - \cos x$, *får Newtons formel udseendet*

$$x_1 = x_0 + \frac{\sin x_0 - 2x_0 \cos x_0}{\cos x_0 - 2x_0 \sin x_0}$$

Med et startgæt på $x_0 = \frac{\pi}{2}$ *fås* $x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} = 1.252486441, x_2 = 1.172239193, x_3 = 1.165607415, x_4 = 1.165561187, x_5 = 1.165561185$. *Herefter sker der ingen ændringer, når der regnes med 10 betydende cifre. Vi regner altså med, at roden er* 1.165561185.

Newtons metode for to ligninger med to ubekendte

Skriv de to ligninger på formen

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \tag{3.1}$$

og antag, at disse ligninger faktisk har mindst én løsning. Ideen er nu den, at gætte på en løsning (x_0, y_0). Linearisere omkring dette gæt, d.v.s. finde tangentplanerne for de to flader

$$z = f(x, y), \quad z = g(x, y)$$

i punkterne $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ og $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, henholdsvis. Ligningerne (1) erstattes derved i første omgang af de lineariserede ligninger

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0 \end{aligned}$$

der også kan skrives

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= -f(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= -g(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Idet $x - x_0$ og $y - y_0$ betragtes som de ubekendte, har vi her to lineære ligninger med to ubekendte. Ligningssystemets *koefficientmatrix* er

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Hvis determinanten af $J(x_0, y_0)$ er forskellig fra nul, ved vi, at systemet (2) har præcis én løsning for $(x - x_0, y - y_0)$ og dermed for (x, y). Denne løsning betegner vi (x_1, y_1). Løsningen kan f.eks. findes v.hj.a. Cramers metode ("determinantmetoden"). Hermed findes

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\det J(x_0, y_0)} \\ y_1 - y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & -f(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & -g(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\det J(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

Ved udregning af determinanterne fås

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)} \\ y_1 &= y_0 - \frac{g(x_0, y_0) f_x(x_0, y_0) - g_x(x_0, y_0) f(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Bemærkning 113 *Kender man til lidt matrixregning, kan formlerne ovenfor skrives således:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - J(x_0, y_0)^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Hermed får formlen en stærkere lighed med den tilsvarende formel for én ligning med én ubekendt.

Hvis ikke vores første gæt var altfor dårligt, så vil (x_1, y_1) være en bedre approksimation til den rigtige løsning til (1). En formodentlig endnu bedre approksimation fås ved i højresiderne af (3) at erstatte (x_0, y_0) med (x_1, y_1). Hermed fås et nyt punkt (x_2, y_2), der igen kan indsættes i højresiderne af (3), o.s.v. Ved denne *iteration* opnås en følge af punkter,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

Der gælder nu følgende sætning.

Sætning 114 *Betragt ligningssystemet (1). Lad (α, β) være en løsning til (1). Antag, at f og g har kontinuerte partielle afledede i en omegn om punktet (α, β). Antag yderligere, at systemets Jacobideterminant*

$$\det J(x, y) = \begin{vmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{vmatrix}$$

er forskellig fra nul i punktet (α, β). Så vil den ved (4) iterativt definerede punktfølge

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

konvergere mod løsningen (α, β), når blot (x_0, y_0) vælges tilstrækkeligt tæt på løsningen (α, β).

Bevis. Beviset for den tilsvarende påstand for én ligning med én ubekendt kan oversættes til den aktuelle situation, men denne oversættelse kræver god kendskab til matrixregning. Her nøjes vi med at vise, at *hvis* følgen er konvergent, altså hvis $(x_n, y_n) \to (\alpha, \beta)$ for $n \to \infty$, hvor (α, β) er et eller andet punkt i hvilken $\det J$ er forskellig fra nul og i omegnen af hvilket f har kontinuerte partielle afledede, så er dette punkt en løsning til (1). For følgens elementer gælder

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n, y_n) g_y(x_n, y_n) - f_y(x_n, y_n) g(x_n, y_n)}{f_x(x_n, y_n) g_y(x_n, y_n) - f_y(x_n, y_n) g_x(x_n, y_n)} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{g(x_n, y_n) f_x(x_n, y_n) - g_x(x_n, y_n) f(x_n, y_n)}{f_x(x_n, y_n) g_y(x_n, y_n) - f_y(x_n, y_n) g_x(x_n, y_n)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nævneren, $\det J(x_n, y_n) = f_x(x_n, y_n) g_y(x_n, y_n) - f_y(x_n, y_n) g_x(x_n, y_n)$, vil være forskellig fra nul, når blot følgens elementer alle er tætte på (α, β). Ved at lade $n \to \infty$, fås heraf

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha - \frac{f(\alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta) - f_y(\alpha, \beta) g(\alpha, \beta)}{f_x(\alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta) - f_y(\alpha, \beta) g_x(\alpha, \beta)} \\ \beta &= \beta - \frac{g(\alpha, \beta) f_x(\alpha, \beta) - g_x(\alpha, \beta) f(\alpha, \beta)}{f_x(\alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta) - f_y(\alpha, \beta) g_x(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

Men heraf følger åbenbart så, at de to tællere er nul, d.v.s.

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta) - f_y(\alpha, \beta) g(\alpha, \beta) &= 0 \\ -g_x(\alpha, \beta) f(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta) f_x(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Betragtes systemet (5) som to ligninger med de to ubekendte $f(\alpha,\beta)$ og $g(\alpha,\beta)$, så er ligningssystemets determinant netop det $J(\alpha,\beta)$. Forudsat, at denne er forskellig fra nul har systemet (5) præcis én løsning. Men da $(f(\alpha,\beta), g(\alpha,\beta)) = (0,0)$ åbenbart er en løsning til (5), så er det løsningen! Hermed har vi givet en del af beviset for sætningen. Vi mangler at vise, at den iterativt definerede følge vil konvergere, når blot (x_0, y_0) vælges tæt nok på (α,β). ■

Bemærkning 115 *Desværre er det svært at sige noget simpelt og generelt om, hvor tæt på løsningen* (α,β) *det gættede punkt* (x_0,y_0) *skal vælges. Det bedste er nok blot at prøve sig frem. Her er det naturligvis afgørende, at man i forvejen har en god idé om, hvor den ønskede løsning ligger. Dette problem har vi også ved løsning af én ligning med én ubekendt ved Newtons metode, men problemet er langt værre, når der er flere ligninger. En idé er at bruge Davidenko's metode. Se Maple-worksheet herom. Det ligger på internettet under noter.*

Eksempel 116 *Der er givet ligningssystemet*

$$\begin{aligned} x^2y + \sin(x+y) &= 2 \\ x + 3y + \ln\left(x^2+y\right) &= 5 \end{aligned}$$

Af en tegning (udført i Maple v.hj.a. implicitplot fra plots-pakken) fremgår, at systemet har en løsning nær $(x,y) = (1,1)$. *Denne løsning ønskes bestemt ved brug af Newtons metode. Vi sætter*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + \sin(x+y) - 2 \\ g(x,y) &= x + 3y + \ln\left(x^2+y\right) - 5 \end{aligned}$$

Vi har

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy + \cos(x+y) \\ f_y(x,y) &= x^2 + \cos(x+y) \\ g_x(x,y) &= 1 + \frac{2x}{x^2+y} \\ g_y(x,y) &= 3 + \frac{1}{x^2+y} \end{aligned}$$

Vi vil ikke her bruge den færdige formel, som vi fandt ovenfor, men foretrækker at følge den metode, der blev brugt ved udledningen. Vi erstatter ligningen $f(x,y) = 0$ *med den lineariserede version af* f *omkring gættet* $(x_0,y_0) = (1,1)$. *Det samme gøres med* g:

$$\begin{aligned} f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) &= 0 \\ g(1,1) + g_x(1,1)(x-1) + g_y(1,1)(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Konkret finder vi så

$$\begin{aligned} \sin 2 - 1 + (2+\cos 2)(x-1) + (1+\cos 2)(y-1) &= 0 \\ \ln 2 - 1 + 2(x-1) + \frac{7}{2}(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Disse ligninger løses nu. Efter omskrivning til

$$\begin{aligned}(2+\cos 2)(x-1)+(1+\cos 2)(y-1) &= 1-\sin 2\\ 2(x-1)+\frac{7}{2}(y-1) &= 1-\ln 2\end{aligned}$$

kan determinantmetoden anvendes og vi finder løsningen (x_1, y_1) *givet ved*

$$\begin{aligned}x_1-1 &= \frac{\begin{vmatrix}1-\sin 2 & 1+\cos 2\\ 1-\ln 2 & \frac{7}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\cos 2 & 1+\cos 2\\ 2 & \frac{7}{2}\end{vmatrix}} = 3.1606\times 10^{-2}\\ y_1-1 &= \frac{\begin{vmatrix}2+\cos 2 & 1-\sin 2\\ 2 & 1-\ln 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\cos 2 & 1+\cos 2\\ 2 & \frac{7}{2}\end{vmatrix}} = 6.9612\times 10^{-2}\end{aligned}$$

Altså $(x_1, y_1) = (1.031606, 1.069612)$*. Dette punkt må nu formodes at være nærmere den rigtige løsning. Der lineariseres nu omkring* (x_1, y_1)*. Efter samme slags regninger som lige udført fås et nyt punkt* $(x_2, y_2) = (1.030775, 1.070557)$*. Således fortsættes. Man finder*

$$(x_3, y_3) = (1.030775, 1.070557)$$

der jo med det viste antal cifre er identisk med (x_2, y_2)*. Her standser man derfor.*

Usikkerhedsregning

Antag, at en fysisk størrelse z er bestemt ved to andre fysiske størrelser x og y, altså at der er en funktion f, så $z = f(x, y)$. Der foreligger nu målinger af størrelserne x og y. Disse er målt til a og b, henholdsvis. Herudfra skal z beregnes som $f(a, b)$. Målingerne af x og y er behæftet med usikkerhederne δa og δb, henholdsvis. Dette betyder, at de korrekte værdier x og y må anses for at ligge indenfor en afstand af henholdsvis δa og δb fra a og b, altså

$$\begin{aligned}a-\delta a &\le x\le a+\delta a\\ b-\delta b &\le y\le b+\delta b\end{aligned}$$

eller, når $\Delta x = x - a$ og $\Delta y = y - b$, kan det formuleres således: $|\Delta x| \le \delta a$ og $|\Delta y| \le \delta b$. Bemærk, at usikkerhederne δa og δb er positive tal, hvorimod Δx og Δy kan være både positive og negative. Vi ønsker nu at vurdere den usikkerhed, som den beregnede størrelse $f(a, b)$ er behæftet med. Den korrekte værdi er $f(x, y)$, så forskellen $\Delta f = f(x, y) - f(a, b)$ er fejlen vi begår ved at acceptere $c = f(a, b)$ som den korrekte værdi. Vi må regne med, at Δx og Δy begge er små, så vi kan derfor erstatte $\Delta f = f(x, y) - f(a, b)$ med differentialet af f i (a, b). Altså

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x,y)-f(a,b) = f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\\ &= f_x(a,b)\,\Delta x+f_y(a,b)\,\Delta y\end{aligned}$$

Hermed finder vi

$$\begin{aligned}
|\Delta f| &= |f_x(a,b)\,\Delta x + f_y(a,b)\,\Delta y| \\
&\le |f_x(a,b)|\,|\Delta x| + |f_y(a,b)|\,|\Delta y| \\
&\le |f_x(a,b)|\,\delta a + |f_y(a,b)|\,\delta b
\end{aligned}$$

Den vurderede usikkerhed δc på den beregnede størrelse z sætter vi derfor til

$$\delta c = |f_x(a,b)|\,\delta a + |f_y(a,b)|\,\delta b$$

idet vi da kan regne med, at

$$f(a,b) - \delta c \le f(x,y) \le f(a,b) + \delta c$$

Eksempel 117 *For en idealgas gælder som bekendt tilstandsligningen*

$$pV = nRT$$

Antag, at n er kendt på forhånd og ikke behæftet med nævneværdig usikkerhed. Der foretages målinger af temperatur og tryk. Resultaterne T_0 og p_0 er behæftet med usikkerhederne δp og δT. Altså regner vi med, at de korrekte værdier T og p afviger fra T_0 og p_0 med højst δp og δT, henholdsvis. Anderledes sagt

$$\begin{aligned}
|\Delta T| &= |T - T_0| \le \delta T \\
|\Delta p| &= |p - p_0| \le \delta p
\end{aligned}$$

Vi beregner nu rumfanget V til

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0}$$

Usikkerheden på den beregnede størrelse er da

$$\delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial T}\right| \delta T + \left|\frac{\partial V}{\partial p}\right| \delta p$$

hvor begge de partielle afledede skal tages i (T_0, p_0). Vi finder $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{p_0}$ og $\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{nRT_0}{p_0^2}$. Altså har vi

$$\begin{aligned}
\delta V &= \left|\frac{nR}{p_0}\right| \delta T + \left|-\frac{nRT_0}{p_0^2}\right| \delta p = \frac{nR}{p_0}\delta T + \frac{nRT_0}{p_0^2}\delta p \\
&= \frac{nR}{p_0}\left(\delta T + \frac{T_0}{p_0}\delta p\right)
\end{aligned}$$

Bemærk, at dette resultat kan formuleres således

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\delta T}{T_0} + \frac{\delta p}{p_0}$$

der betyder, at den relative usikkerhed på V er summen af de relative usikkerheder på T og p.
Et taleksempel: Med $n = 1$ mol, $T_0 = 273$ K, $p_0 = 1.00$ atm. og usikkerhederne $\delta T = 0.5$ K og $\delta p = 0.01$ atm. fås, idet V måles i liter og $R = 0.082054$ l atm/(mol K) og idet vi kun bruger ét betydende ciffer i resultatet

$$\delta V = 0.082054\,(0.5 + 273 \times 0.01)\,liter = 0.\,265\,03 \cong 0.\,3liter$$

Det beregnede rumfang er

$$V = \frac{nRT_0}{p_0} = 0.082054 \times 273liter = 22.\,401liter$$

I betragtning af den vurderede usikkerhed på dette resultat bør dette nok angives med én decimal som $V = 22.4liter$. Ønskes usikkerheden samtidigt angivet, kan man skrive $V = (22.4 \pm 0.3)\,liter$.

Eksempel 118 *For en ikke-ideal gas som Cl_2, er rumfanget af én mol ved én atmosfæres tryk og ved temperaturen $273K$ iflg. en tabel (Kaye&Laby) $22.\,06liter$. For en sådan ikke-ideel gas kunne man bruge van der Waals tilstandsligning til beregning af rumfanget, når tryk og temperatur er målt. Når $n = 1$ har van der Waals ligning udseendet*

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

I samme tabel opgives konstanterne til $a = 0.01294latm/mol^2$ og $b = 2.510 \times 10^{-3}l/mol$. Med disse indsat og med $p = p_0 = 1atm$ og $T = T_0 = 273K$ løses ligningen let numerisk, og man finder $V = 22.39liter$, et resultat, som kun afviger med $0.01liter$ fra idealgastilfældet. Vil man generelt løse ligningen for V udtrykt ved de variable p og T, kan dette i princippet lade sig gøre, da man efter multiplikation med V^2 har en 3.gradsligning, og for en sådan findes der en løsningsformel. Det resultat, der kommer ud af denne formel, er imidlertid så uoverskueligt, at det er ubrugeligt til vores formål, som er at bestemme usikkerheden på V, når usikkerhederne på de målte størrelser T og p er kendte. Men ved implicit differentiation, hvor V opfattes som en funktion af T og p, fås, når der først differentieres mht. T

$$-2\frac{a}{V^3}\frac{\partial V}{\partial T}(V - b) + \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\frac{\partial V}{\partial T} = R$$

Derefter differentieres mht. p

$$\left(1 - 2\frac{a}{V^3}\frac{\partial V}{\partial p}\right)(V - b) + \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

Vi ønsker at bestemme $\frac{\partial V}{\partial T}$ og $\frac{\partial V}{\partial p}$. Ved omskrivning fås

$$\begin{aligned}\left(-2\frac{a}{V^3}(V - b) + \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\right)\frac{\partial V}{\partial T} &= R \\ \left(2\frac{a}{V^3}(V - b) - \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\right)\frac{\partial V}{\partial p} &= V - b\end{aligned}$$

Ved indsættelse af $T = 273K$, $p = 1atm.$ *og* $V = 22.39liter$ *fås* $\frac{\partial V}{\partial T} = 0.082l/K$ *og* $\frac{\partial V}{\partial p} = -22.4l/atm.$ *Altså har vi*

$$\begin{aligned} \delta V &= \left|\frac{\partial V}{\partial T}\right|\delta T + \left|\frac{\partial V}{\partial p}\right|\delta p = 0.082\delta T + 22.4\delta p \\ &= 0.082 \times 0.5 + 22.4 \times 0.01 = 0.\,265 \cong 0.3liter \end{aligned}$$

Bemærk, at usikkerheden på V *ikke er til at skelne fra usikkerheden i idealgastilfældet.*

Eksempel 119 *Svingningstiden for et (udæmpet) matematisk pendul med længde* l *er ved små udsving*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

hvor g *er tyngdeaccelerationen. Vi antager, at usikkerheden på kendskabet til længden er* δl *og usikkerheden på* g *er* δg. *Vi vil bestemme usikkerheden på den beregnede størrelse* T, *evt. for at kunne afgøre om afvigelser mellem beregnede og målte værdier for* T *skyldes, at udsvingene er for store, således at formlen skal erstattes af den korrekte formel*

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - m\sin^2 u}}$$

hvor $m = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$ *og* θ_0 *er det maksimale vinkeludsving fra lodlinien. Med udgangspunkt i den simple formel finder vi*

$$\begin{aligned} \delta T &= \left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\delta l + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right|\delta g \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\delta l + \left|-\frac{\pi\sqrt{l}}{g^{\frac{3}{2}}}\right|\delta g \\ &= \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g}\right) = \frac{1}{2}T\left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g}\right) \end{aligned}$$

Altså

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g}\right)$$

De relative usikkerheders gennemsnit giver altså den relative usikkerhed på T. *Et taleksempel: Antag, at* $l = 1m, g = 9.81m\sec^{-2}, \delta l = 1mm$ *og* $\delta g = 0.005m\sec^{-2}$. *Så finder vi* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.81}}\sec = 2.\,006\,1\sec$. *For usikkerheden har vi*

$$\delta T = \frac{1}{2}T\left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g}\right) = \left(10^{-3} + \frac{0.005}{9.81}\right)\sec \approx 1.\,5 \times 10^{-3}\sec$$

Vi kan angive det beregnede resultat for T *på formen* $T = 2.0061 \pm 0.0015\,\mathrm{sec}$. *Lad os nu antage, at det maksimale udsving var* $45 grader$*, og at* T *måles til* $2.0873\,\mathrm{sec}$. *Vi må konkludere, at vi bør bruge den mere indviklede formel for* T. *Gør vi det, finder vi, idet* $m = \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2 u}} = 2.0863\,\mathrm{sec}$$

Antager vi det maksimale udsving for godt bestemt, er usikkerheden på den sidste beregning stadig givet ved $\delta T = \frac{1}{2} T \left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g} \right)$ *og derfor stadig lig med* $1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{sec}$. *Da forskellen mellem* 2.0873 *og* 2.0863 *åbenbart er mindre end* 1.5×10^{-3}*, er der altså god overensstemmelse mellem det målte og det beregnede resultat, når dette udregnes ved brug af den mere indviklede formel. Det er rimeligere at tage usikkerheden på det maksimale udsving med i betragtning. Vi får da brug for også at udregne* $\frac{\partial T}{\partial \theta_0}$. *Vi har*

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_0} = \frac{\partial T}{\partial m} \frac{dm}{d\theta_0} = \frac{\partial T}{\partial m} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial m} \sin \theta_0$$

Det vanskeligste er at bestemme $\frac{\partial T}{\partial m}$. *Vi vil udnytte, at integralet*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

er en differentiabel funktion af y *for* $y \in [c, d]$ *med differentialkvotient*

$$\int_a^b f_y(x, y)\, dx$$

når blot f *og* f_y *er kontinuerte funktioner i rektanglet* $[a, b] \times [c, d]$. *Da disse betingelser er opfyldt i det foreliggende tilfælde, finder vi*

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{\left(1 - m \sin^2 u\right)^{\frac{3}{2}}} du$$

Ved indsættelse af talværdierne findes ved numerisk integration

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -0.598\,96$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned}
\delta T &= \left| \frac{\partial T}{\partial l} \right| \delta l + \left| \frac{\partial T}{\partial g} \right| \delta g + \left| \frac{\partial T}{\partial \theta_0} \right| \delta \theta_0 \\
&= \frac{1}{2} T \left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial T}{\partial m} \right| \sin \theta_0 \delta \theta_0 \\
&= \frac{1}{2} \frac{T}{l} \delta l + \frac{1}{2} \frac{T}{g} \delta g + \frac{1}{2} 0.598\,96 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \delta \theta_0 \\
&= 1.0 \cdot \delta l + 0.1 \cdot \delta g + 0.2 \cdot \delta \theta_0
\end{aligned}$$

Med $\delta l = 1mm$, $\delta g = 0.005m\sec^{-2}$ *og med en ikke ubetydelig usikkerhed på det maksimale udsving* $\delta\theta_0 = 1grad = \frac{\pi}{180}$ *fås*

$$\delta T = 5 \times 10^{-3}\sec$$

således at resultatet kan angives som

$$T = 2.086 \pm 0.005\sec$$

3.0.12 Differentiabilitet af sammensat funktion

Vi betragter først den situation, hvor x og y i $f(x, y)$ erstattes af funktioner af en variabel t.

Sætning 120 *Lad* f *være en reel funktion af to variable defineret i mængden* $S \subset R^2$, *og antag, at* f *er differentiabel i det indre punkt* $(a, b) \in S$. *Lad* p *og* q *være reelle funktioner af én variabel defineret i et interval* $I \subset R$, *og antag, at* p *og* q *er differentiable i* $t_0 \in I$. *Antag endelig, at* $(p(t), q(t)) \in S$ *for alle* $t \in I$, *og at* $(p(t_0), q(t_0)) = (a, b)$. *Lad* F *være den sammensatte funktion givet ved*

$$F(t) = f(p(t), q(t)) \ \text{ for } t \in I$$

Så er F *differentiabel i* t_0 *med differentialkvotient givet ved følgende formel, der kaldes kædereglen:*

$$F'(t_0) = f_x(a, b)p'(t_0) + f_y(a, b)q'(t_0)$$

Med $(a, b) = (p(t_0), q(t_0))$ *indsat fås altså*

$$F'(t_0) = f_x(p(t_0), q(t_0))p'(t_0) + f_y(p(t_0), q(t_0))q'(t_0)$$

Med anden skrivemåde fås

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dq}{dt}$$

hvor vi har undladt at nævne, i hvilket punkt de afledte skal tages.

Bevis. Da f er differentiabel i (a, b), findes der en funktion g, og to tal α og β, så

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \alpha h + \beta k + g(h, k)\,\|(h, k)\|$$

gældende for alle (h, k) i en omegn af $(0, 0)$, og hvor funktionen g opfylder $g(h, k) \to 0$ for $(h, k) \to (0, 0)$. Med $h = h(t) = p(t) - p(t_0)$ og $k = k(t) = q(t) - q(t_0)$ fås

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(p(t), q(t)) - f(p(t_0), q(t_0)) \\ &= \alpha(p(t) - p(t_0)) + \beta(q(t) - q(t_0)) \\ &\quad + g(h(t), k(t))\,\|(h(t), k(t))\| \\ &= \alpha(p(t) - p(t_0)) + \beta(q(t) - q(t_0)) \\ &\quad + g(h(t), k(t))\sqrt{h(t)^2 + k(t)^2} \end{aligned}$$

Da vi har

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{t-t_0}\sqrt{h(t)^2+k(t)^2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{p(t)-p(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{q(t)-q(t_0)}{t-t_0}\right)^2} \to \sqrt{p'(t_0)^2+q'(t_0)^2}
\end{aligned}$$

for $t \to t_0$, fås derfor

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} &= \alpha\lim_{t\to t_0}\frac{p(t)-p(t_0)}{t-t_0}+\beta\lim_{t\to t_0}\frac{q(t)-q(t_0)}{t-t_0} \\
&= \alpha p'(t_0)+\beta q'(t_0),
\end{aligned}$$

idet $h(t) = p(t) - p(t_0) \to 0$ og $k(t) = q(t) - q(t_0) \to 0$ for $t \to t_0$, således at $g(h(t), k(t)) \to 0$ for $t \to t_0$. Da $\alpha = f_x(a, b)$ og $\beta = f_y(a, b)$, er beviset ført. ■

Bemærkning 121 *Idet gradienten af f er givet ved $\nabla f = (f_x, f_y)$, kan kædereglen også skrives*

$$\frac{dF}{dt}=\nabla f\cdot\left(\frac{dp}{dt},\frac{dq}{dt}\right)$$

hvor højre side er et skalarprodukt.

Bemærkning 122 *Kædereglen kan bevises på en lidt simplere måde, hvis man forudsætter, at f, p og q ikke blot er differentible i de relevante punkter, men at f har partielle afledede i en omegn af (a, b), og disse er kontinuerte i (a, b), samt at p og q er differentiable i en omegn af t_0 med afledede, der er kontinuerte i t_0. Beviset går som følger: Lad funktionen H være givet ved $H(s,t) = f(p(s), q(t))$. Så har H partielle afledede, og disse er kontinuerte i (t_0, t_0). De er givet ved*

$$\begin{aligned}
H_s(s,t) &= f_x(p(s),q(t))\,p'(s) \\
H_t(s,t) &= f_y(p(s),q(t))\,q'(t)
\end{aligned}$$

H er altså differentiabel i (t_0, t_0), og der gælder

$$H(t_0+h,t_0+k)=H(t_0,t_0)+H_s(t_0,t_0)\,h+H_t(t_0,t_0)\,k+g(h,k)\,\|(h,k)\|$$

hvor $g(h,k) \to 0$ for $(h,k) \to (0,0)$. Altså har vi med $F(t) = H(t,t) = f(p(t), q(t))$ og ved at sætte $h = t - t_0$ og $k = t - t_0$ ovenfor:

$$\begin{aligned}
\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} &= \frac{H(t,t)-H(t_0,t_0)}{t-t_0} \\
&= H_s(t_0,t_0)+H_t(t_0,t_0)+g(t-t_0,t-t_0)\cdot\frac{t-t_0}{|t-t_0|}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Heraf følger, at

$$\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=H_s(t_0,t_0)+H_t(t_0,t_0)$$

hvilket betyder, at F er differentiabel med differentialkvotient $H_s(t_0,t_0)+H_t(t_0,t_0)$, men dette udtryk er lig med $f_x(p(t_0), q(t_0))p'(t_0) + f_y(p(t_0), q(t_0))q'(t_0)$.

Eksempel 123 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+y^2} - x$$

og lad $p(t) = \arctan t$ *og* $q(t) = e^{3t}$ *for* $t \in R$. *Lad* F *være den sammensatte funktion givet ved* $F(t) = f(p(t), q(t))$. *Vi vil undersøge, om* F *er differentiabel i* 0, *og i bekræftende fald finde* $F'(0)$. *Vi har* $(p(0), q(0)) = \left(\arctan 0, e^0\right) = (0,1)$. *Funktionen* f *har kontinuerte partielle afledede alle andre steder end i* $(0,0)$. *Derfor er* f *differentiabel i* $R^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Vi kan derfor benytte sætningen ovenfor. Vi konkluderer, at* F *er differentiabel i* 0 *med differentialkvotient givet ved kædereglen:*

$$F'(0) = f_x(0,1)\,p'(0) + f_y(0,1)\,q'(0)$$

Vi bestemmer først de partielle afledede af f. *Vi finder for* $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \\ f_y(x,y) &= 2y - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Altså har vi $f_x(0,1) = -1$ *og* $f_y(0,1) = 1$. *Vi har også, at* $p'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *og* $q'(t) = 3e^{3t}$, *og dermed* $p'(0) = 1$ *og* $q'(0) = 3$. *Altså fås*

$$F'(0) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2$$

Eksempel 124 *Lad* $T(x,y)$ *betegne temperaturen i punktet* (x,y) *på overfladen af en plade. Temperaturen antages altså i dette eksempel at være uafhængig af tiden: En stationær tilstand er indtrådt. Lad* $x = p(t), y = q(t)$ *med* $t \in I$, *være banen for et insekt, der går på pladen. Parameteren* t *er tiden. Til tiden* t *befinder insektet sig altså i punktet* $(p(t), q(t))$. *Den temperatur insektet vil føle i fodsålerne til tiden* t *er givet ved*

$$T_{insekt}(t) = T(p(t), q(t))$$

Temperaturændring pr. tidsenhed i fodsålerne er givet ved kædereglen

$$T'_{insekt}(t) = T_x(p(t), q(t))\,p'(t) + T_y(p(t), q(t))\,q'(t)$$

eller anderledes skrevet

$$\frac{dT_{insekt}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dq}{dt} = \nabla T \cdot v$$

hvor $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$ *er temperaturgradienten, og* $v = \left(\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}\right)$ *er insektets hastighed. I anvendelserne (fysik, kemi, teknik, osv.) ser man meget ofte bogstaverne* x *og* y *brugt på to måder i samme formel: Dels som navnene på de uafhængige variable, der bruges ved beskrivelsen af pladens temperatur. Disse variable har naturligvis intet med insekter at gøre. Dels også som de funktioner* *vi har kaldt* p *og* q, *der bruges til beskrivelse af insektets bane. Med denne dobbeltbrug får kædereglen udseendet*

$$\frac{dT_{insekt}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ofte vil man også se symbolet T_{insekt} *erstattet af* T. *Hermed vil også bogstavet* T *optræde i to betydninger i samme formel:*

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Er man tilstrækkeligt sofistikeret, så bliver man ikke forvirret. Er man ikke, vil kædereglen lyde som hokus-pokus.

Eksempel 125 *Lad* $\nabla T(2,3) = (4,-1)$ *og antag, at insektet til tiden* 5 *beinder sig i punktet* $(2,3)$ *og har hastighed* $v = \left(\frac{1}{2}, 6\right)$. *Vi vil finde temperaturændringen pr. tidsenhed i fodsålerne af insektet til tiden* 5. *Vi har fra eksemplet ovenfor til tiden 5*

$$\frac{dT_{insekt}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dq}{dt} = \nabla T \cdot v = (4,-1)\cdot\left(\frac{1}{2}, 6\right) = -4$$

Temperaturen aftager altså med 4 temperaturenheder pr. tidsenhed på det pågældende tidspunkt.

Eksempel 126 *Lad* $T(x,y,t)$ *betegne temperaturen i punktet* (x,y) *på overfladen af en plade til tiden* t. *Lad* $x = p(t), y = q(t)$ *med* $t \in I$, *være banen for et insekt, der går på pladen. Den temperatur insektet vil føle i fodsålerne til tiden* t *er givet ved*

$$T_{insekt}(t) = T(p(t), q(t), t)$$

Temperaturændring pr. tidsenhed i fodsålerne er givet ved kædereglen

$$T'_{insekt}(t) = T_x(p(t), q(t), t)\, p'(t) + T_y(p(t), q(t), t)\, q'(t) + T_t(p(t), q(t), t)$$

eller anderledes skrevet

$$\frac{dT_{insekt}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Hvis vi som tidligere bruger bogstaverne x *og* y *både som navnene på de uafhængige variable, der bruges ved beskrivelsen af pladens temperatur og som de funktioner vi har kaldt* p *og* q, *der bruges til beskrivelse af insektets bane, så får kædereglen nu udseendet*

$$\frac{dT_{insekt}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Hvis også symbolet T_{insekt} *erstattes af* T *fås*

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Med denne (mis-)brug af symbolerne er det meget vigtigt, at man skelner mellem $\frac{dT}{dt}$ *og* $\frac{\partial T}{\partial t}$. *De er jo ikke ens, hverken begrebsmæssigt eller hvad angår størrelse.*

Eksempel 127 *Lad f være en reel funktion af to variable defineret i mængden $S \subset R^2$. Lad k være en niveaukurve for f, dvs. at $f(x,y) = C$ =konstant for alle punkter på kurven k. Antag, at kurven er givet ved en differentiabel parameterfremstilling $(x,y) = (p(t), q(t)), t \in I$, og går til tiden $t = t_0$ gennem et punkt $(a,b) \in S$, i hvilket f er differentiabel. Så har vi åbenbart*

$$f(p(t), q(t)) = C$$

for alle $t \in I$. Ved differentiation af denne identitet fås for $t = t_0$

$$f_x(a,b)p'(t_0) + f_y(a,b)q'(t_0) = 0$$

altså

$$\nabla f(a,b) \cdot (p'(t_0), q'(t_0)) = 0$$

Vektoren $(p'(t_0), q'(t_0))$ er, hvis den ikke er nulvektoren, en tangentvektor til kurven k. Vi konkluderer i så fald, at gradienten til f står vinkelret på niveakurven i (a,b).

Eksempel 128 *Vi vil undersøge væksten af en funktion f af to variable i et punkt (a,b) i en bestemt retning, givet ved en enhedsvektor $\mathbf{e} = (\alpha, \beta)$. En ret linie gennem punktet (a,b) i retningen givet ved e, har parameterfremstillingen $(x,y) = (a,b) + t\mathbf{e} = (a,b) + t(\alpha,\beta) = (a + t\alpha, b + t\beta)$. Tilvæksten i f langs linien divideret med skridtlængde langs linien er (da $\mathbf{e} = (\alpha,\beta)$ er en enhedsvektor)*

$$\frac{f(a + t\alpha, b + t\beta) - f(a,b)}{t}$$

Vi er interesserede i grænseværdien for $t \to 0$, altså

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\alpha, b + t\beta) - f(a,b)}{t}$$

Dette betyder, at vi skal undersøge differentiabiliteten af det sammensatte udtryk $f(a + t\alpha, b + t\beta)$ for $t = 0$. Hvis f er differentiabel i (a,b), er $f(a + t\alpha, b + t\beta)$ differentiabelt for $t = 0$, og

$$\left.\frac{d}{dt} f(a + t\alpha, b + t\beta)\right|_{t=0} = f_x(a,b)\,\alpha + f_y(a,b)\,\beta = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{e}$$

Den beregnede størrelse kaldes den retningsafledede af f i punktet (a,b) i retningen $\mathbf{e} = (\alpha,\beta)$. En rimelig betegnelse for denne kunne være $f_e(a,b)$.

Eksempel 129 *Vi vil finde den retningsafledede af $f(x,y) = \sin(x + 3y) + y^2$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ i retningen givet ved vektoren $\mathbf{v} = (2,1)$. En enhedsvektor i denne retning er*

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$$

De partielle afledede af f er $f_x(x,y) = \cos(x+3y)$ og $f_y(x,y) = 3\cos(x+3y)+2y$. Så $f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi = -1$ og $f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi + \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{\pi}{3}$. Dermed har vi den retningsafledede

$$f_e(a,b) = \left(-1, -1+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-3+\frac{\pi}{3}\right)$$

der med 5 betydende cifre er lig med $-0.873\,32$.

Vi betragter nu den situation, hvor x og y i $f(x,y)$ erstattes af funktioner af flere variable, i sætningen nedenfor er brugt 3 variable kaldet r, s og t, simpelthen for at undgå at tale abstrakt om k variable. Antallet er imidlertid ganske ligegyldigt, da sætningen kun udtaler sig om eksistensen af en partiel afledet mht. en af disse variable. Nedenfor er brugt t. Dermed kommer de andre (r og s) overhovedet ikke i spil. Sætningen kræver da heller ikke noget bevis, idet den er en umiddelbar følge af den foregående sætning. Den burde derfor nok være kaldt et korollar til denne sætning.

Sætning 130 *Lad f være en reel funktion af to variable defineret i mængden $S \subset R^2$, og antag, at f er differentiabel i det indre punkt $(a,b) \in S$. Lad p og q være reelle funktioner af 3 variable (r,s,t) defineret i en mængde $G \subset R^3$, og antag, at p og q har partielle afledede mht. t i $(r_0,s_0,t_0) \in G$. Antag endelig, at $(p(r,s,t),q(r,s,t)) \in S$ for alle $(r,s,t) \in G$, og at $(p(r_0,s_0,t_0),q(r_0,s_0,t_0)) = (a,b)$. Lad F være den sammensatte funktion givet ved*

$$F(r,s,t) = f\left(p(r,s,t),q(r,s,t)\right) \text{ for } (r,s,t) \in G$$

Så har F en partiel afledet mht. t i (r_0,s_0,t_0) givet ved følgende formel

$$F_t(r_0,s_0,t_0) = f_x(a,b)p_t(r_0,s_0,t_0) + f_y(a,b)q_t(r_0,s_0,t_0)$$

Med anden skrivemåde fås

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial t}$$

hvor vi har undladt at nævne, i hvilket punkt de afledte skal tages.

Kapitel 4

Taylorudvikling

Som forberedelse til Taylors sætning i flere variable indfører vi differentialoperatoren D_h ved

$$D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_q \frac{\partial}{\partial x_q}$$

når $h = (h_1, h_2, \ldots .h_q)$ er en fast vektor, der ikke afhænger af $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Differentialoperatoren D_h opererer på funktioner af q variable på følgende måde

$$D_h f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + h_q \frac{\partial f}{\partial x_q} = h \cdot \nabla f$$

Derfor skrives ogå

$$D_h = h \cdot \nabla$$

Eksempel 131 *Hvis* $q = 2$ *og* $h = (3, -2)$, *er* $D_h = 3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}$, *så*

$$D_h \left(x^3 + xy^2\right) = 3\left(3x^2 + y^2\right) - 2\left(2xy\right) = 9x^2 + 3y^2 - 4xy$$

og

$$\begin{aligned} D_h^2 \left(x^3 + xy^2\right) &= D_h \left(D_h \left(x^3 + xy^2\right)\right) = D_h \left(9x^2 + 3y^2 - 4xy\right) \\ &= 3\left(18x - 4y\right) - 2\left(6y - 4x\right) = 62x - 24y. \end{aligned}$$

Det sidste resultat kunne vi også have fundet ved først at udregne

$$D_h^2 = \left(3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

hvorefter vi udnytter, at

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 6x, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3 + xy^2\right) = 2y, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^3 + xy^2\right) = 2x$$

således at

$$D_h^2 \left(x^3 + xy^2\right) = 9 \cdot 6x - 12 \cdot 2y + 4 \cdot 2x = 62x - 24y.$$

Når $q = 2$ kan D_h^n findes ved hjælp af binomialformlen

$$D_h^n = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_1^k h_2^{n-k} \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$$

Vi er nu klar til at formulere Taylors sætning i flere variable:

Sætning 132 *Lad f have kontinuerte partielle afledede op til og med $(n+1)$'te orden i en åben mængde $S \subset R^q$. Lad $a \in S$ og lad $h \in R^q$ være så lille, at punkterne $a + th, t \in [0,1]$, alle ligger i S. Så gælder, når $x = a + h$, at*

$$f(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} D_h^3 f(a) + \ldots + \frac{1}{n!} D_h^n f(a) + R_n(x)$$

hvor

$$D_h = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_q \frac{\partial}{\partial x_q} = h \cdot \nabla$$

og hvor restleddet er givet ved

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(D_h^{n+1} f\right)(a + \xi h, b + \xi k)$$

hvor $\xi \in]0,1[$.

Bevis. Vi bruger Taylors sætning i én variabel på funktionen g givet ved

$$g(t) = f(a + th)$$

for $t \in [0,1]$. Funktionen g er $n+1$ gange differentiabel med $g^{(n+1)}$ kontinuert i en omegn af 0. Ved hjælp af kædereglen finder vi

$$g'(t) = f_{x_1}(a + th) h_1 + f_{x_2}(a + th) h_2 + \ldots + f_{x_q}(a + th) h_q = (D_h f)(a + th)$$

Videre fås

$$g''(t) = \frac{d}{dt}\left((D_h f)(a + th)\right) = [D_h (D_h f)](a + th) = \left(D_h^2 f\right)(a + th)$$

idet resultatet fra før nu bruges på $D_h f$ i stedet for på f. Generelt fås altså

$$g^{(k)}(t) = \left(D_h^k f\right)(a + th).$$

Taylors sætning for g med udviklingspunkt 0 giver nu

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{3!} g'''(0) + \ldots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + R_n$$

hvor

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)$$

og $\xi \in]0,1[$. Hermed følger sætningen umiddelbart. ■

Definition 133 *Polynomiet*

$$P_n(x) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \frac{1}{3!} D_h^3 f(a) + \ldots + \frac{1}{n!} D_h^n f(a)$$

hvor $h = x - a$*,*

Definition 134 *vil blive kaldt det n'te Taylorpolynomium for* f *med udviklingspunkt* a*.*

I to variable, dvs. med $q = 2$, og når $n = 2$, kan vi formulere sætningen således:

Sætning 135 *Lad* f *have kontinuerte partielle afledede op til og med* 3*. orden i en åben mængde* $S \subset R^2$*. Lad* $(a,b) \in S$ *og lad* $(h,k) \in R^2$ *være så lille, at punkterne* $(a,b) + t(h,k), t \in [0,1]$*, alle ligger i* S*. Så gælder, når* $(x,y) = (a,b) + (h,k)$*, at*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) \\ &+\frac{1}{2}\Big((x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\Big) + R_2(x,y) \end{aligned}$$

hvor restleddet er givet ved

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 (f)(a + \xi h)$$

hvor $\xi \in]0,1[$.

I to variable er det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt (a,b) altså

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) \\ &+\frac{1}{2}\Big((x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\Big) \end{aligned}$$

Eksempel 136 *Lad* f *være funktionen*

$$f(x,y) = \sin(x+3y)\, e^{-x^2}$$

Vi vil finde det 2. Taylorpolynomium udfra $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *Vi må udregne en del afledede*

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{-x^2}(\cos(x+3y) - 2x\sin(x+3y)) \\ f_y(x,y) &= 3e^{-x^2}\cos(x+3y) \\ f_{xx}(x,y) &= e^{-x^2}\left(\left(4x^2-3\right)\sin(x+3y) - 4x\cos(x+3y)\right) \\ f_{xy}(x,y) &= -3e^{-x^2}(\sin(x+3y) + 2x\cos(x+3y)) \\ f_{yy}(x,y) &= -9e^{-x^2}\sin(x+3y) \end{aligned}$$

Ved indsættelse fås

$$f_x\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0, f_y\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0, f_{xx}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=3, f_{xy}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=3, f_{yy}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=9$$

Altså har vi, idet også $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-1$, *at*

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= -1+\frac{1}{2}\left(3x^2+2\cdot 3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+9\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\\ &= -1+\frac{3}{2}x^2+3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{9}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dette polynomium må formodes, at ligne f *godt i omegnen af udviklingspunktet* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Dette betyder, at*

$$f(x,y)-f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\approx\frac{3}{2}x^2+3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{9}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

for (x,y) *ikke for langt fra* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Polynomiet på højre side er positivt for* $(x,y)\neq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Dette ses ved omskrivning:*

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^2+3x\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{9}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 &= \frac{3}{2}\left(x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-\frac{3}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\\ &= \frac{3}{2}\left(x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2+3\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2>0 \end{aligned}$$

for $(x,y)\neq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Da vi jo har ignoreret restleddet i Taylors formel, nøjes vi på dette sted med at sige, at dette kraftigt antyder, at* $f(x,y)>f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *for alle* (x,y) *nær* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *altså at* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *er et egentligt lokalt minimumspunkt. Vi vender tilbage til disse problemer i kapitlet om ekstremumsbestemmelse (optimering).*

Eksempel 137 *Taylorpolynomier for funktioner af flere variable kan fås v.hj.a. kommandoen* mtaylor *i Maple. Man må før brugen udstede kommandoen* readlib(mtaylor); *Således fås det 2.Taylorpolynomium for funktionen ovenfor således:*
readlib(mtaylor);
*mtaylor(sin(x+3y)*exp(-x^2), [x=0,y=Pi/2], 3);*
Man skal bemærke, at der ikke forekommer O-led, som der gør, når kommandoen taylor bruges for funktioner af en variabel.

Eksempel 138 *Funktionen* f *givet ved*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

for alle $(x,y)\in R^2$ *er kontinuert overalt, men ikke differentiabel i* $(0,0)$. *Funktionen har ikke engang partielle afledede i* $(0,0)$. *Vi har jo, at* $f(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$, *der som bekendt ikke er differentiabel i* 0. *Funktionen har altså ikke noget Taylorpolynomium* P_n *udfra* $(0,0)$, *når* $n\geq 1$. *Det er derfor overraskende, at Maple* *på kommandoen mtaylor(sqrt(x^2+y^2), [x=0,y=0], 2); returnerer* $\sqrt{x^2+y^2}$. *Resultatet er selvfølgelig galt af den nævnte grund, men desuden er* $\sqrt{x^2+y^2}$ *ikke engang et polynomium. Jeg mener at vide, at proceduren mtaylor udnytter idéen i beviset for Taylors sætning i flere variable, dvs. anvender kommandoen taylor på* $g(t) = f(a+th, b+tk)$. *Der sker så det, at taylor anvendt på* $\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}$ *fejlagtigt giver* $\sqrt{x^2+y^2}$. *Grunden er den, at taylor(sqrt(t^2), t=0, 2); returnerer* t. *Før man brokker sig for meget herover, bør man dog betænke, at Maple principielt regner komplekst, således at* $\sqrt{t^2}$ *ikke blot er lig med* $|t|$. *Maples svar på kommandoen taylor(abs(t), t=0, 2); er passende, nemlig en fejlmelding:* Error, (in series/abs) no series at 0.

Kapitel 5

Ekstremum

5.1 Én variabel

Definition 139 *Et punkt a i definitionsområdet for funktionen f kaldes et (lokalt) minimumspunkt for f, hvis der findes et tal $\delta > 0$, så $f(x) \geq f(a)$ når $|x - a| < \delta$ og x iøvrigt ligger i definitionsområdet for f. Punktet siges at være et egentligt (lokalt) minimumspunkt, hvis uligheden er skarp, altså hvis $f(x) > f(a)$ (naturligvis kun for $x \neq a$). Et maksimumspunkt defineres analogt.*

Definition 140 *Et punkt a i definitionsområdet for funktionen f kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle x i definitionsområdet for f. Punktet siges at være et egentligt globalt minimumspunkt, hvis uligheden er skarp, altså hvis $f(x) > f(a)$ (naturligvis kun for $x \neq a$). Et globalt maksimumspunkt defineres analogt. Globale minimums- og maksimumsværdier kaldes oftere for mindste- og størsteværdier.*

Følgende sætninger skulle gerne være velkendte:

Sætning 141 *Lad f være en reel funktion af én variabel. Lad a være et indre punkt i definitionsområdet for f. Antag, at f har lokalt ekstremum i a og at f er differentiabel i a. Så gælder, at $f'(a) = 0$.*

Sætning 142 *En reel kontinuert funktion af én variabel antager på en lukket og begrænset mængde både en største- og en mindsteværdi.*

På disse to sætninger bygger den sædvanlige strategi til ekstremumsbestemmelse:

Korollar 143 *Lad f være kontinuert på det lukkede og begrænsede interval I. Så findes de lokale og globale ekstremumspunkter for f blandt*

1. *Punkter x_0, hvor $f'(x_0) = 0$. ("Stationære punkter")*
2. *Punkter, i hvilke f ikke er differentiabel.*

3. Endepunkterne for intervallet I.

Efter bestemmelsen af et stationært punkt, kan man som bekendt afgøre om et sådant er et ekstremumspunkt ved en fortegnsundersøgelse af f'. Denne metode er ganske fortrinlig for funktioner af én variabel, men egner sig ikke til generalisering til funktioner af flere variable. Her benyttes i stedet (som vi skal se nedenfor) en udregning af højere afledede af funktionen. En udregning af højere afledede af funktionen kan imidlertid også bruges for en funktion af en variabel. Her kommer den sætning, man kan bruge.

Sætning 144 *Lad f være defineret i intervallet I og lad a være et indre punkt i I. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder*

1. *Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt for f.*
2. *Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.*
3. *Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.*
4. *Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) = 0$, så gælder, at hvis $f^{(4)}(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis $f^{(4)}(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt f.*
5. *Generelt gælder: Antag, at $f^{(k)}(a) = 0$ for $k = 1, 2, \dots, n-1$ og $f^{(n)}(a) \neq 0$. Hvis n er ulige, har f ikke lokalt ekstremum i a. Hvis n er lige har f egentligt lokalt minimum i a, hvis $f^{(n)}(a) > 0$, og egentligt lokalt maksimum i a, hvis $f^{(n)}(a) < 0$.*

Bevis. Det er åbenbart nok at bevise det generelle tilfælde. Ifølge Taylors formel har vi for et tal ξ mellem x og a

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n
\end{aligned}
$$

Da $f^{(n)}(a) \neq 0$ og da $f^{(n)}$ er kontinuert i a, er $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ og af samme fortegn som $f^{(n)}(a)$, når blot x (og dermed ξ) er tæt nok på a. Fortegnet for $f(x) - f(a)$ er altså det samme som fortegnet for $f^{(n)}(a)(x-a)^n$. Heraf aflæses resultatet umiddelbart. ■

Eksempel 145 *Lad $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$. Vi ser, at $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, mens $f^{(4)}(0) = 1$. Altså har f egentligt minimum i 0.*

Eksempel 146 *Lad $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + x^5$. Vi ser, at $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, mens $f^{(5)}(0) = 120$. Altså har f ikke ekstremum i 0.*

5.2 To variable

Definition 147 *Et punkt* (a, b) *i definitionsområdet for funktionen* f *kaldes et (lokalt) minimumspunkt for* f*, hvis der findes et tal* $\delta > 0$*, så* $f(x, y) \geq f(a, b)$ *når* $dist\left((x, y), (a, b)\right) < \delta$ *og* (x, y) *iøvrigt ligger i definitionsområdet for* f*. Punktet siges at være et egentligt (lokalt) minimumspunkt, hvis uligheden er skarp, altså hvis* $f(x, y) > f(a, b)$ *(naturligvis kun for* $(x, y) \neq (a, b)$*). Et maksimumspunkt defineres analogt.*

Definition 148 *Et punkt* (a, b) *i definitionsområdet for funktionen* f *kaldes et egentligt saddelpunkt for* f*, hvis der findes en ret linie gennem* (a, b)*, langs hvilken* f *har egentligt lokalt maksimum i* (a, b)*, og også en ret linie gennem* (a, b)*, langs hvilken* f *har egentligt lokalt minimum i* (a, b)*.*

Bemærkning 149 *Ordet saddelpunkt bruges ofte blot som betegnelse for et stationært punkt, der hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum. Bemærk altså, at vi her med begrebet egentligt saddelpunkt mener noget andet og mere.*

Definition 150 *Et punkt* (a, b) *i definitionsområdet for funktionen* f *kaldes et globalt minimumspunkt for* f*, hvis* $f(x, y) \geq f(a, b)$ *for alle* (x, y) *i definitionsområdet for* f*. Punktet siges at være et egentligt globalt minimumspunkt, hvis uligheden er skarp, altså hvis* $f(x, y) > f(a, b)$ *(naturligvis kun for* $(x, y) \neq (a, b)$*). Et globalt maksimumspunkt defineres analogt.*

Som for funktion af én variabel får vi brug for at vide, om en funktion overhovedet har en største- og en mindsteværdi. Som nævnt tidligere i kurset, gælder følgende sætning:

Sætning 151 *Lad* $D \subseteq R^2$ *og lad* $f \colon D \to R$ *være kontinuert. Så gælder:*

1. *Hvis* D *er en sammenhængende mængde, så er billedmængden* $f(D)$ *et interval, og* f *antager altså enhver værdi mellem hver to givne funktionsværdier.*

2. *Hvis* D *er lukket og begrænset, så er* $f(D)$ *også lukket og begrænset, og* f *antager dermed såvel en største- som en mindsteværdi på* D*.*

3. *Hvis* D *er en lukket, begrænset og sammenhængende mængde, så er billedmængden* $f(D)$ *et lukket og begrænset interval.*

Det er meget godt at vide, at en største- og en mindsteværdi eksisterer, men hvordan finder vi dem? Der gælder en sætning, der er en umiddelbar generalisation af en sætning om funktion af en variabel:

Sætning 152 *Lad* f *være en reel funktion af to variable. Lad* (a, b) *være et indre punkt i definitionsområdet for* f*. Antag, at* f *har lokalt ekstremum i* (a, b) *og at* f *har partielle afledede af første orden i* (a, b)*. Så gælder, at* $f_x(a, b) = 0 \wedge f_y(a, b) = 0$*, altså* $\nabla f(a, b) = (0, 0)$*.*

Bevis. Betragt f på linien $y = b$. Hvis f har et lokalt ekstremum i det indre punkt (a, b), så har funktionen $x \longmapsto f(x, b)$ lokalt ekstremum i a, og a er indre punkt i definitionsmængden for denne funktion af én variabel. Hvis f har en partiel afledet mht. x i (a, b), så er funktionen $x \longmapsto f(x, b)$ differentiabel i a med differentialkvotient $f_x(a, b)$. Af den sætning, der gælder for funktion af én variabel følger derfor, at $f_x(a, b) = 0$. Påstanden, at $f_y(a, b) = 0$ følger på samme måde. ■

Definition 153 *Et punkt (a, b), hvor $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, kaldes et stationært punkt for f.*

Som for funktion af én variabel fås nu følgende strategi til ekstremumsbestemmelse:

Korollar 154 *Lad f være kontinuert på den lukkede og begrænsede mængde S. Så findes de lokale og globale ekstremumspunkter for f blandt*

1. *De stationære punkter.*
2. *Punkter, i hvilke f ikke har partielle afledede.*
3. *Randpunkterne for mængden S.*

Eksempel 155 *Lad f være funktionen givet ved*

$$f(x, y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$$

for alle $(x, y) \in R^2$. Vi vil bestemme største- og mindsteværdien for f på halvcirkelskiven $S = \left\{(x, y) \middle| x^2 + (y-2)^2 \leq 8 \wedge y \leq 2\right\}$.

Vi bestemmer først evt. stationære punkter. Vi har, at $f_x(x, y) = 2x - 2xy = 2x(1 - y)$ og $f_y(x, y) = -x^2 + 4y$. Derfor fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (0, 0) \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 1) \wedge -x^2 + 4y = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (\pm 2, 1) \end{aligned}$$

Der er altså 3 stationære punkter, nemlig $(0, 0), (2, 1)$ og $(-2, 1)$. Alle 3 punkter ligger indenfor S.

Så undersøger vi f på randen af S. Randen består dels af halvcirkelbuen $x^2 + (y-2)^2 = 8 \wedge y \leq 2$ og dels af liniestykket $y = 2 \wedge -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$. På liniestykket har f værdier givet ved

$$f(x, 2) = -x^2 + 8$$

Størsteværdien af dette udtryk på intervallet $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ er klart 8, og mindsteværdien ligeså klart 0. På halvcirkelbuen finder vi de værdier f har ved at eliminere x ved brug af $x^2 + (y-2)^2 = 8$. Hermed fås

$$f(x, y) = \left(8 - (y-2)^2\right)(1 - y) + 2y^2 = 4 - 3y^2 + y^3 = g(y)$$

idet vi kalder dette udtryk for $g(y)$. *Vi skal nu bestemme største- og mindsteværdi for* g *på intervallet* $\left[2-2\sqrt{2},2\right]$. *Vi har nu et endimensionalt problem af samme karakter som det oprindelige todimensionale. Vi bestemmer "stationære punkter". Vi har* $g'(y)=3y^2-6y=3y(y-2)$. *Nulpunkter for* g' *er* 0 *og* 2, *der begge ligger i intervallet. Største- og mindsteværdi for* g *kan antages i enten* $0,2$ *eller endepunktet* $2-2\sqrt{2}$. *Vi har* $g(0)=4, g(2)=0$ *og* $g\left(2-2\sqrt{2}\right)=24-16\sqrt{2}\cong 1.3726$. *Største- og mindsteværdi på halvcirkelbuen er åbenbart* 4 *og* 0. *Største- og mindsteværdi på randen som helhed er dermed* 8 *og* 0. *Disse værdier skal sammenlignes med værdierne af* f *i de tre stationære punkter. Vi finder* $f(0,0)=0$ *og* $f(\pm 2,1)=2$.

Vi konkluderer, at størsteværdien for f *på* S *er* 8, *og den antages på randen i punktet* $(0,2)$. *Mindsteværdien er* 0, *og den antages i tre punkter, dels i de to randpunkter* $\left(\pm 2\sqrt{2},1\right)$ *dels i det stationære punkt* $(0,0)$.

Eksempel 156 *Et område af form som et ligesidet trapez afgrænses på den lange side af en husmur. De øvrige tre sider skal bestå af et hegn af given totallængde* L. *Vi vil finde den opdeling af hegnet i tre dele og de vinkler i trapezet, der gør, at arealet mellem hegn og mur er størst mulig.*

Kalder vi længden af hver af de to skrå dele af hegnet for x, *og den spidse vinkel mellem mur og hegn for* θ, *så er arealet givet ved*

$$A=A(x,\theta)=x\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\left((L-2x)+(L-2x+2x\cos\theta)\right)=x\sin\theta\cdot(L-2x+x\cos\theta)$$

Vi skal altså bestemme størsteværdi for $A(x,\theta)$, *når* $(x,\theta)\in\left[0,\frac{1}{2}L\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. *Vi bestemmer først stationære punkter. Vi finder*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x} &= \sin\theta\,(L-2x+x\cos\theta)+x\sin\theta\,(-2+\cos\theta)\\
&= \sin\theta\,(L-4x+2x\cos\theta)\\
\frac{\partial A}{\partial \theta} &= x\cos\theta\,(L-2x+x\cos\theta)+x\sin\theta\,(-x\sin\theta)\\
&= x\cos\theta\,(L-2x)+x^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\\
&= x\cos\theta\,(L-2x)+x^2\left(2\cos^2\theta-1\right)
\end{aligned}$$

Hermed har vi, idet $\sin\theta=0$ *ikke, og* $x=0$ *ej heller, giver anledning til størsteværdi for* A:

$$\begin{aligned}
\nabla A &= (0,0)\Longleftrightarrow L-4x+2x\cos\theta=0\wedge x\cos\theta\,(L-2x)+x^2\left(2\cos^2\theta-1\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta=\frac{4x-L}{2x}\wedge\frac{4x-L}{2}(L-2x)+x^2\left(2\left(\frac{4x-L}{2x}\right)^2-1\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta=\frac{4x-L}{2x}\wedge -xL+3x^2=0\Longleftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\wedge x=\frac{1}{3}L\\
&\Longleftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}\wedge x=\frac{1}{3}L
\end{aligned}$$

Vi har altså fundet det stationære punkt $(x,\theta) = \left(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}\right)$. *Randen af området* $\left[0, \frac{1}{2}L\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *består af 4 dele. Vi undersøger værdien af* A *på hver af disse. Vi finder*

$$\begin{aligned} A(0,\theta) &= 0 \text{ med størsteværdi } 0 \\ A\left(\frac{1}{2}L,\theta\right) &= \frac{1}{4}L^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}L^2\sin 2\theta \text{ med størsteværdi } \frac{1}{8}L^2 \\ A(x,0) &= 0 \text{ med størsteværdi } 0 \\ A\left(x,\frac{\pi}{2}\right) &= x(L-2x) \text{ med størsteværdi } \frac{1}{8}L^2 \end{aligned}$$

Størsteværdien på randen er altså $\frac{1}{8}L^2$. *Værdien i det stationære punkt er*

$$A\left(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}}L^2$$

der åbenbart er større end størsteværdien på randen. Vi ser, at når $(x,\theta) = \left(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}\right)$ *udgør trapezet halvdelen af en regulær sekskant med sidelængde* $\frac{1}{3}L$. *I lyset heraf ser resultatet meget troværdigt ud.*

Eksempel 157 *En beholder (et glas, et vandfad eller lignende) skal konstrueres med form som en keglestub, så rumfanget bliver størst mulig for en given mængde af materialer. Dette opfatter vi som et ønske om at maksimere rumfanget for et givet totalareal af bund og sider. De størrelser, der kan varieres er radius* R *af toppen af stubben, radius* r *af bunden samt stubbens højde* h, *dvs. den vinkelrette afstand mellem de to cirkelskiver. Vi introducerer for kortvarigt brug sidelængden* L. *Størrelserne er forbundet ved ligningen*

$$(R-r)^2 + h^2 = L^2$$

Rumfanget af keglestubben er givet ved

$$V = \frac{1}{3}h\left(R^2 + rR + r^2\right)$$

Overfladearealet af keglestubben fraregnet toppen er

$$S = \pi L(R+r) + \pi r^2 = \pi\sqrt{(R-r)^2 + h^2}\,(R+r) + \pi r^2$$

Med given værdi af S *skal vi maksimere* V. *Denne givne værdi af* S *sætter vi til 1, idet størrelsen i realiteten er irrelevant. Hermed kan* h *udtrykkes ved* r *og* R *som følger*

$$h = \frac{1}{\pi(R+r)}\sqrt{1 + 2\pi^2R^2r^2 - 2\pi r^2 - \pi^2R^4}$$

Indsættes dette i udtrykket for V, *fås rumfanget som funktion af* r *og* R *til*

$$V(r,R) = \frac{1}{3}\frac{R^2 + rR + r^2}{\pi(R+r)}\sqrt{1 + 2\pi^2R^2r^2 - 2\pi r^2 - \pi^2R^4}$$

Denne funktion skal maksimeres på området bestemt ved begrænsningerne $\pi R^2 \leq 1$ *og* $0 \leq r \leq R$*. Dette område er åbenbart en trekant. Vi bemærker først, at funktionen* V *åbenbart ikke er defineret i* $(0,0)$*. Imidlertid følger det let, at* $V(r,R) \to 0$ *for* $(r,R) \to (0,0)$*, når grænseovergangen sker i trekanten. Vi definerer så* $V(0,0) = 0$*, hvormed* V *er kontinuert overalt i trekanten. Størsteværdi på trekanten antages nu enten i et stationært punkt i det indre af trekanten eller i et randpunkt. Vi bestemmer først stationære punkter. Ved hjælp af Maple findes, at der ét stationært punkt i det indre af trekanten, og det er*

$$(r,R) = \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-2\right)}{21\pi}}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-2\right)}{21\pi}}\right) \cong (0.227\,58, 0.414\,85)$$

Udregner man den dertil svarende sidelængde L *finder man, at den er lig med den fundne værdi for* R*. Værdien af rumfanget* V *i det stationære punkt er*

$$V_{stat} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-4}{3\pi}} \cong 0.123\,39$$

Denne værdi skal nu sammenlignes med størsteværdien på randen. Vi finder på den randdel, der svarer til at bunden er skrumpet ind til et punkt, således at vi faktisk har et kræmmerhus,

$$V(0,R) = \frac{R}{3\pi}\sqrt{1-\pi^2 R^4}$$

der skal maksimeres på intervallet givet ved $0 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$*. Man finder, at størsteværdien på denne randdel er*

$$V\left(0, 3^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}3^{\frac{1}{4}} \cong 0.116\,68$$

altså lidt mindre end værdien i det stationære punkt. Videre finder vi, at $V\left(r, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = 0$ *for alle* $r \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$*. På den tredie og sidste del af randen (hvor vi har en cylinderformet beholder) har vi*

$$V(R,R) = \frac{1}{2}R\left(1-\pi R^2\right)$$

der skal maksimeres på intervallet givet ved $R \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$*. Vi finder, at størsteværdien er på denne randdel er*

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{3\pi}}, \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\right) = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cong 0.108\,58$$

der end ikke er så stor som størsteværdien på den første randdel.

Vores endelige konklusion er altså, at størsteværdien for rumfanget antages i det stationære punkt givet ovenfor. Man kan dog bemærke, at rumfanget af kræmmerhuset ikke er så fjernt derfra og iøvrigt giver en bedre løsning end konservesdåsen.

5.2.1 Et stationært punkts type

Et stationært punkt kan klassificeres som følger:

1. Lokalt ekstremumspunkt, egentligt eller uegentligt, maksimum eller minimum
2. Egentligt saddelpunkt
3. Ingen af delene

Selv om vi ikke ved største- mindsteværdibestemmelse på et lukket og begrænset område har brug for at kende typen af de stationære punkter, er det dog godt at have et kriterium til afgørelse heraf. Et kriterium analogt med det kriterium vi har for funktioner af en variabel.

Sætning 158 *Lad f have kontinuerte partielle afledede op til og med* 2. *orden i en omegn om punktet* (a,b). *Antag, at* (a,b) *er et stationært punkt for* f. *Lad* $\Delta(a,b) = f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b)$. *Så gælder*

1. *Hvis* $\Delta(a,b) < 0$, *så er* (a,b) *et egentligt ekstremumspunkt, og hvis* $f_{xx}(a,b) < 0$ *er det et maksimumspunkt, hvis* $f_{xx}(a,b) > 0$ *er det et minimumspunkt.*
2. *Hvis* $\Delta(a,b) > 0$, *så er* (a,b) *et egentligt saddelpunkt.*
3. *Tilfældet* $\Delta(a,b) = 0$ *kræver en nærmere undersøgelse.*

Bevis. Lad $A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b)$ og $f_{yy}(a,b)$. Lad funktionen g af en variabel være givet ved

$$g(t) = f(a+th, b+tk)$$

hvor $h = x - a$ og $k = y - b$. Vi beregner v.hj.a. kædereglen de afledede af g:

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(a+th,b+tk)\,h + f_y(a+th,b+tk)\,k \\ g''(t) &= f_{xx}(a+th,b+tk)\,h^2 + 2f_{xy}(a+th,b+tk)\,hk + f_{yy}(a+th,b+tk)\,k^2 \end{aligned}$$

Hermed har vi, at $g'(0) = 0$, og

$$g''(0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

Bemærk, at $f(a,b) + g''(0)$ er det 2. Taylorpolynomium for f udfra (a,b).

1. Antag først, at $\Delta(a,b) = B^2 - AC < 0$. Så har vi åbenbart, at $A \neq 0$. Vi kan derfor omskrive $g''(0)$ til

$$\begin{aligned} g''(0) &= A\left(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \frac{ACk^2}{A^2}\right) \\ &= A\left(\left(h + \frac{Bk}{A}\right)^2 - \frac{\left(B^2 - AC\right)k^2}{A^2}\right) \\ &= A\left(\left(h + \frac{Bk}{A}\right)^2 - \frac{\Delta(a,b)\,k^2}{A^2}\right) \end{aligned}$$

Antag nu, at $A > 0$. Så ser vi, at $g''(0) > 0$. Dermed gælder, at $g''(0) \geq \alpha > 0$ for alle (h,k) med $h^2 + k^2 = 1$. Men da $g''(0)$ er homogen af anden grad i (h,k) gælder derfor generelt, at $g''(0) \geq \alpha\left(h^2 + k^2\right)$. Da de anden afledede af f er kontinuerte, kan vi til ethvert $\varepsilon > 0$ bestemme et $\delta > 0$, så $h^2 + k^2 < \delta$ implicerer, at

$$|g''(t) - g''(0)| \leq \varepsilon\left(h^2 + 2|hk| + k^2\right) \leq 2\varepsilon\left(h^2 + k^2\right)$$

for alle $t \in [0,1]$. Med $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$ fås af Taylors formel anvendt på g for et tal $\xi \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= g(1) - g(0) \\ &= \frac{1}{2}g''(\xi) = \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{2}\left(g''(\xi) - g''(0)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}g''(0) - \varepsilon\left(h^2 + k^2\right) \geq \frac{1}{2}\alpha\left(h^2 + k^2\right) - \varepsilon\left(h^2 + k^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h^2 + k^2\right)(\alpha - 2\varepsilon) = \frac{\alpha}{4}\left(h^2 + k^2\right) > 0 \end{aligned}$$

Heraf følger sætningens første påstand, når $A > 0$. Tilfældet $A < 0$ forløber på samme vis.

2. Antag dernæst, at $\Delta(a,b) = B^2 - AC > 0$. Hvis $A \neq 0$, kan vi bruge omskrivningen fra før og ser, at $Ag''(0) < 0$, når $h + \frac{Bk}{A} = 0$ og $k \neq 0$. Vi ser også, at $Ag''(0) > 0$ for $k = 0$ og $h \neq 0$. Altså er der to linier langs hvilke f har henholdsvis egentligt lokalt maksimum og egentligt lokalt minimum. Dermed er (a,b) et egentligt saddelpunkt. Hvis $A = 0$, men $C \neq 0$ vil en lignende omskrivning føre til samme konklusion. Hvis $A = C = 0$, må $B \neq 0$ (da $\Delta \neq 0$). Vi har nu, at $g''(0) = 2Bhk$, der har forskellig fortegn i retningerne (h,h) og $(h,-h)$. Dermed har vi også et egentligt saddelpunkt i dette tilfælde.

3. At tilfældet $\Delta = 0$ kræver nærmere undersøgelse, vil blive vist i en række eksempler.

■

Bemærkning 159 *I beviset betragtede vi f på linier gennem det stationære punkt. Man kunne under beviset for første del fristes til at standse allerede ved konstateringen af, at $g''(0) > 0$ for alle $(h,k) \neq (0,0)$. Thi dette betyder jo, at f langs enhver ret linie har egentligt lokalt minimum i $(0,0)$. Dette medfører imidlertid ikke i sig selv, at f har lokalt minimum, hvilket vi skal se i et senere eksempel. Det er afgørende, at det 2. Taylorpolynomium for f opfylder uligheden $P_2(a+h, b+k) - f(a,b) = g''(0) \geq \alpha\left(h^2 + k^2\right)$.*

Vi afprøver først sætningen på en funktion, der blev betragtet i et tidligere eksempel.

Eksempel 160 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$$

Vi har $f_x(x,y) = 2x - 2xy = 2x(1-y)$ og $f_y(x,y) = -x^2 + 4y$, hvoraf vi tidligere fandt, at de stationære punkter er $(0,0)$ og $(\pm 2, 1)$. Vi finder videre

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 - 2y \\ f_{xy}(x,y) &= -2x \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

Med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ har vi så, at $\Delta(0,0) = -8 < 0$ og $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, så $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt. For $(\pm 2, 1)$ har vi $\Delta(\pm 2, 1) = 16 > 0$, så disse to punkter er begge egentlige saddelpunkter.

De næste 4 eksempler medtages for at vise, at når for et stationært punkt (a,b) vi har, at $\Delta(a,b) = 0$, så kan intet på dette grundlag siges om typen.

Eksempel 161 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^4 + y^4$. Da $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$ for $(x,y) \neq (0,0)$, er $(0,0)$ åbenbart et egentligt minimumspunkt (endog globalt). Med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ fås $\Delta(0,0) = 0$.*

Eksempel 162 *Lad f være givet ved $f(x,y) = -x^4 - y^4$. Da $f(x,y) = -x^4 - y^4 < 0 = f(0,0)$ for $(x,y) \neq (0,0)$, er $(0,0)$ åbenbart et egentligt maksimumspunkt (endog globalt). Med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ fås $\Delta(0,0) = 0$.*

Eksempel 163 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^4 - y^4$. Vi ser hurtigt, at $(0,0)$ er et stationært punkt. Da $f(x,0) = x^4 > 0 = f(0,0)$ for $x \neq 0$, har f åbenbart et egentligt minimumspunkt langs x-aksen i punktet $(0,0)$. Da $f(0,y) = -y^4 < 0 = f(0,0)$ for $y \neq 0$, har f åbenbart et egentligt maksimumspunkt langs y-aksen i punktet $(0,0)$. Altså er $(0,0)$ et egentligt saddelpunkt. Med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ fås $\Delta(0,0) = 0$.*

Eksempel 164 *Lad f være givet ved $f(x,y) = x^3 + y^4$. Vi ser, at $(0,0)$ er et stationært punkt. Da $g(t) = f(th, tk) = t^3 h^3 + t^4 k^4$ har $g''(0) = 0$ og $g'''(0) = 18h^3 \neq 0$ for $h \neq 0$ har g ikke (og dermed f ikke) ekstremum i retninger (h,k) med $h \neq 0$. Da for $h = 0$ vi har, at $g^{(4)}(0) = 24k^4 > 0$ for $k \neq 0$, har f åbenbart et egentligt maksimumspunkt langs y-aksen i punktet $(0,0)$. Punktet er altså hverken et ekstremumspunkt eller et egentligt saddelpunkt. Med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ fås $\Delta(0,0) = 0$.*

Eksempel 165 *Lad f være givet ved $f(x,y) = 2y^2 - 2yx^2 + x^4$. Udtrykket kan omskrives til $f(x,y) = \left(y - x^2\right)^2 + y^2$, så det følger heraf, at $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$. Altså er $(0,0)$ et egentligt globalt minimumspunkt. Vi vil dog prøve vores typekriterium og bruger udtrykkets oprindelige form. Vi finder*

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4xy + 4x^3 = -4x\left(y - x^2\right) \\ f_y(x,y) &= 4y - 2x^2 \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow \left(x=0 \vee y=x^2\right) \wedge 2y-x^2=0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y)=(0,0) \end{aligned}$$

altså, at $(0,0)$ *er eneste stationære punkt. Vi finder videre*

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -4y+12x^2 \\ f_{xy}(x,y) &= -4x \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

hvormed vi ser, at med $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ *fås* $\Delta(0,0)=0$*. Vores kriterium siger altså intet. Vi vil nu betragte* f *langs enhver ret linie gennem* $(0,0)$*, dvs. at vi bruger idéen fra beviset for typekriteriet. Sæt altså* $g(t)=f(th,tk)$*, hvor* $(h,k)\neq(0,0)$*. Så finder vi, at* $g''(0)=4k^2$*. Heraf ser vi, at når blot* $k\neq 0$ *har* f *egentligt lokalt minimum langs linien med retningsvektoren* (h,k)*. Tilbage er altså kun at betragte retningen* $(1,0)$*, dvs. x-aksen. Her finder vi så med* $(h,k)=(1,0)$*, at* $g''(0)=0, g'''(0)=0$ *og* $g^{(4)}(0)=24>0$*. Altså har* f *også egentligt lokalt minimum langs x-aksen. Det er fristende på dette grundlag at konkludere, at* f *har egentligt lokalt minimum i* $(0,0)$*.*
Selvom om denne påstand er sand, er konklusionen draget på et utilstrækkeligt grundlag, hvilket næste eksempel viser.

Eksempel 166 *Lad* f *være funktionen*

$$f(x,y)=\left(y-x^2\right)^2+y^2-2x^2y$$

Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x\left(2y-x^2\right) \\ f_y(x,y) &= 4\left(y-x^2\right) \end{aligned}$$

hermed har vi

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow \left(x=0 \vee 2y=x^2\right) \wedge y=x^2 \\ &\Longleftrightarrow (x,y)=(0,0) \end{aligned}$$

så $(0,0)$ *er det eneste stationære punkt. Det vises uden besvær ligesom i eksemplet ovenfor, at* f *har egentligt lokalt minimum i* $(0,0)$ *langs enhver linie gennem* $(0,0)$*. Men* f *har ikke lokalt minimum i* $(0,0)$*, hvilket ses af, at på parablen* $y=x^2$*, der går gennem* $(0,0)$*, har* f *værdier givet ved*

$$f\left(x,x^2\right)=-x^4<0$$

for alle $x\neq 0$*. Vi bemærker, at* f *har egentligt maksimum langs denne parabel. Det stationære punkt* $(0,0)$ *er hverken et ekstremumspunkt eller et egentligt saddelpunkt.*

Bemærkning 167 *Man kunne fristes til at tro, at hvis f har netop ét stationært punkt i R^2, og dette er et lokalt minimumspunkt, så har f også nødvendigvis globalt minimum i dette punkt (med forudsætninger om eksistens af kontinuerte partielle afledede overalt). Den tilsvarende påstand gælder nemlig for funktioner af én variabel: Har en differentiabel funktion g netop ét stationært punkt a i intervallet I, og har g lokalt minimum i a, så er a også globalt minimumspunkt for g. Antag nemlig, at der fandtes et punkt $c \in I$ med $g(c) < g(a)$. Så må g antage et maksimum i et punkt $d \neq a$ i intervallet mellem a og c. Men i et sådan punkt har vi $g'(d) = 0$ i modstrid med antagelsen om, at a var eneste stationære punkt. Eksemplet*

$$f(x,y) = e^{2y} - 2\left(x^2 - 1\right)^2 e^y$$

der på nær et fortegn er taget fra den blå bog, viser, at det tilsvarende resultat er galt for funktioner af to variable. Denne funktion har et egentligt lokalt minimum i $(0,0)$, der også er det eneste stationære punkt. Men $f(x,0) \to -\infty$ for $x \to \infty$, så f har intet globalt minimum.

Kapitel 6

Differentialform og kurveintegral

Vi tænker os et fysisk system, der under en proces er givet ved to fysiske parametre x og y (man kan tænke på tryk og temperatur) og ved denne proces føres fra en tilstand til en anden. Denne ændring kan i et xy-koordinatsystem afbildes som en kurve, der fører fra starttilstanden til sluttilstanden. En fysisk størrelse Ω (tænk på arbejde udført på systemet, varme tilført systemet eller en egenskab ved systemet såsom dets rumfang) tænkes at forøges med $\Delta\Omega$, når parametrene x og y under processen undergår ændringerne Δx og Δy, henholdsvis. Denne forøgelse $\Delta\Omega$ tænkes approksimativt at kunne udtrykkes ved

$$\Delta\Omega = F_1(x,y)\,\Delta x + F_2(x,y)\,\Delta y$$

når Δx og Δy er små. Mere præcist tænkes følgende at være opfyldt for alle $(\Delta x, \Delta y)$ i en omegn om $(0,0)$ og under processen (dvs. langs kurven)

$$\Delta\Omega = F_1(x,y)\,\Delta x + F_2(x,y)\,\Delta y + g(\Delta x, \Delta y)\,\|(\Delta x, \Delta y)\|$$

hvor g er en funktion, der opfylder $g(\Delta x, \Delta y) \to 0$ for $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Vi vil sige, at den differentielle ændring i Ω langs processen er

$$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

Hvis man synes, at man har set noget lignende før, så er det ganske vist. Definitionen på differentiabilitet af en funktion af to variable lød jo næsten ord til andet ligesådan. Den meget vigtige forskel er imidlertid tilføjelsen om, at ændringen sker langs en given kurve og at størrelsen Ω er tilknyttet processen, ikke i almindelighed systemet.

Eksempel 168 *Lad os betragte en idealgas. For en sådan gælder tilstandsligningen $pV = nRT$. Lad os tænke os, at $n = 1$ (mol). Vi betragter det arbejde, som udføres på systemet, når dette føres fra tilstanden (p_1, T_1) til tilstanden (p_2, T_2) langs to forskellige kurver i et pT-koordinatsystem.*

1. *Den første kurve består af to rette liniestykker. Først bringes systemet under konstant temperatur T_1 fra trykket p_1 til trykket p_2. Derefter bringes systemet under konstant tryk p_2 til temperaturen T_2. Det arbejde δW, der udføres på systemet under en udvidelse af gassen på dV er givet ved $\delta W = -pdV$. Vi finder V udtrykt ved p og T: $V = \frac{RT}{p}$. Hermed har vi*

$$dV = -\frac{RT}{p^2}dp + \frac{R}{p}dT$$

altså fås

$$\delta W = \frac{RT}{p}dp - RdT$$

Det samlede arbejde udført på systemet under denne proces er summen af det arbejde W_1, der udføres under den første del og det arbejde W_2, der udføres unden den anden del. Vi finder

$$W_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{RT_1}{p}dp = RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

idet temperaturen holdes konstant lig med T_1 under den første del af processen. Dernæst finder vi

$$W_2 = \int_{T_1}^{T_2} -RdT = -R\,(T_2 - T_1)$$

idet trykket holdes konstant under den anden del af processen. Det samlede arbejde udført på systemet undere processen er altså

$$W = W_1 + W_2 = RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1} - R\,(T_2 - T_1)$$

2. *Den anden kurve består også af to rette liniestykker. Først bringes systemet under konstant tryk p_1 fra temperaturen T_1 til temperaturen T_2. Derefter bringes systemet under konstant temperatur T_2 til trykket p_2.Ligesom før er det arbejde δW, der udføres på systemet under en udvidelse af gassen på dV er givet ved*

$$\delta W = -pdV = \frac{RT}{p}dp - RdT$$

Det samlede arbejde udført på systemet under denne proces er igen summen af det arbejde W_1, der udføres under den første del og det arbejde W_2, der udføres unden den anden del. Vi finder

$$W_1 = \int_{T_1}^{T_2} -RdT = -R\,(T_2 - T_1)$$

idet trykket holdes konstant under den første del af processen. Dernæst finder vi

$$W_2 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{RT_2}{p}dp = RT_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

idet temperaturen holdes konstant lig med T_2 under den anden del af processen. Det samlede arbejde udført på systemet undere processen er altså

$$W = W_1 + W_2 = -R(T_2 - T_1) + RT_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Vi bemærker, at arbejdet udført på systemet under de to processer ikke er ens (med mindre $T_2 = T_1$). Derimod er rumfangsændringen uafhængig af den proces, der fører systemet fra (p_1, T_1) til (p_2, T_2). Den er jo bestemt ved sammenhængen $V = \frac{RT}{p}$, så

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{RT_2}{p_2} - \frac{RT_1}{p_1}$$

Man siger, at V er en tilstandsfunktion, altså en størrelse, der er knyttet til et systems tilstand, hvorimod arbejdet ikke er tilknyttet systemet, men hører til den proces, som systemet undergår.

6.0.2 Differentialform og kurveintegral

Definition 169 *Lad S være en åben mængde i R^2. Lad F_1 og F_2 være reelle funktioner definerede i S. Udtrykket*

$$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

kaldes en differentialform i S.

Bemærkning 170 *Navnet 'differentialform' kan vi tænke os betyder, at udtrykket ω har form som et differential af en funktion f*

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

Vi skal meget snart se, at det langt fra er tilfældet, at en differentialform ω er differentialet df af en funktion f. Det er undtagelsen, snarere end reglen.

Definition 171 *Lad S være en åben mængde i R^2. Lad k være en kurve forløbende i S og givet ved en parameterfremstilling*

$$(x,y) = (p(t), q(t)), \quad t \in [a,b]$$

hvor p og q er stykkevist differentiable. Lad $\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ være en differentialform i S. Med kurveintegralet $\int_k \omega$ menes integralet

$$\int_a^b \left(F_1(p(t), q(t))\,p'(t) + F_2(p(t), q(t))\,q'(t)\right) dt$$

når dette da ellers eksisterer.

Bemærkning 172 *Vi kan tænke os betydningen af kurveintegralet som en opsummering af størrelsen ω langs kurven. I idealgaseksemplet ovenfor var der tale om en bestemmelse af det på systemet udførte arbejde under processen. Den beregning vi udførte var faktisk en udregning af kurveintegralet af δW langs to forskellige veje, der hver var sammensat af to rette liniestykker.*

Bemærkning 173 *Idet* $\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ *kan skrives på formen* $\omega = (F_1, F_2)\cdot(dx.dy) = \overline{F}\cdot d\overline{r}$, *når* $\overline{F} = (F_1, F_2)$ *og* $\overline{r} = (x,y)$, *kan symbolet for kurveintegralet skrives*

$$\int_k \omega = \int_k \overline{F}\cdot d\overline{r}$$

Det definitionsmæssige udtryk kan tilsvarende skrives

$$\int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t))\cdot \overline{r}'(t)\,dt$$

når vi lader $\overline{r}(t) = (p(t), q(t))$ *og* $\overline{r}'(t) = (p'(t), q'(t))$. *I denne formulering kan man ved tolkning af* $\overline{F}(x,y)$ *som et kraftfelt og* t *som tiden opfatte* $\overline{F}(\overline{r}(t))\cdot \overline{r}'(t)$ *som effekten til tiden* t, *idet* $\overline{r}'(t)$ *er hastigheden. Hermed er kurveintegralet en integration over tiden af effekten, altså det langs kurven af kraftfeltet udførte arbejde.*

Eksempel 174 *Lad der i den øvre halvplan* $S = \{(x,y)\,|y>0\}$ *være givet differentialformen*

$$\omega = \frac{x}{y}dx + x\ln y\ dy$$

Vi vil bestemme kurveintegralet af ω *langs kurven* k *givet ved parameterfremstillingen* $(x,y) = \left(t^2, e^{-t}\right)$, $t\in[0,1]$. *Kurven forbinder åbenbart punktet* $(0,1)$ *med punktet* $\left(1, e^{-1}\right)$. *Vi finder*

$$\begin{aligned}
\int_k \omega &= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{e^{-t}}2t + t^2\ln\left(e^{-t}\right)\left(-e^{-t}\right)\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(2t^3e^t + t^3e^{-t}\right)dt \\
&= \left[2e^t\left(t^3 - 3t^2 + 6t - 6\right) - e^{-t}\left(t^3 + 3t^2 + 6t + 6\right)\right]_0^1 \\
&= 18 - 4e - 16e^{-1}
\end{aligned}$$

Eksempel 175 *Lad* ω *være samme differentialform som i forrige eksempel. Vi vil udregne kurveintegralet af* ω *langs en anden vej* K, *der ligesom* k *ovenfor fører fra punktet* $(0,1)$ *med punktet* $\left(1, e^{-1}\right)$. *Den nye kurve* K *er sammensat af to rette liniestykker. Første del er vandret og fører fra* $(0,1)$ *til* $(1,1)$, *parametrisering:* $(x,y) = (t,1)\,, t\in[0,1]$. *Andel del er lodret og fører fra* $(1,1)$ *til* $\left(1,e^{-1}\right)$, *parametrisering:* $(x,y) = \left(1, te^{-1} + 1 - t\right)$, $t\in[0,1]$. *Hermed finder vi*

$$\begin{aligned}
\int_k \omega &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \ln\left(te^{-1} + 1 - t\right)\left(e^{-1} - 1\right)dt \\
&= \frac{1}{2} + \int_1^{e^{-1}} \ln u\ du = \frac{1}{2} + \left[u\ln u - u\right]_1^{e^{-1}} \\
&= \frac{3}{2} - 2e^{-1}
\end{aligned}$$

Vi bemærker, at resultatet er et andet end det vi fandt i forrige eksempel på trods af, at kurverne forbinder de samme punkter i de to eksempler.

6.0.3 Greens sætning i planen

Greens sætning i planen hører hjemme blandt en række sætninger fra vektoranalysen (Green's, Stokes' og Gauss' sætninger). Den er den simpleste af disse. (George Green 1793-1841).

Definition 176 *Lad en lukket kurve k være givet ved en kontinuert parameterfremstilling, $\overline{r}(t), t \in [a,b]$. Hvis $\overline{r}(t_1) \neq \overline{r}(t_2)$ for alle $t_1 \neq t_2$ bortset fra at $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$, så skærer k ikke sig selv. Kurven kaldes en Jordan-kurve.*

Definition 177 *Med symbolet $C^1([a,b])$ betegnes mængden af differentiable funktioner defineret i $[a,b]$, for hvilke også den afledede er kontinuert.*

Definition 178 *Vi skal kalde mængden S i xy-planen for xy-elementær, hvis den ved opdeling med akseparallelle linier kan skrives som foreningsmængden af endeligt mange mængder $S_1, S_2, ..., S_n$, der hver for sig både kan beskrives som området mellem to grafer af C^1-funktioner af x og også som området mellem to grafer af C^1-funktioner af y. Altså $S_i = \{(x,y)\,|g_1(x) \leq y \leq g_2(x), x \in [a,b]\}$ og også $S_i = \{(x,y)\,|h_1(y) \leq x \leq h_2(y), y \in [c,d]\}$, hvor $g_1, g_2 \in C^1([a,b])$ og $h_1, h_2 \in C^1([c,d])$.*

Sætning 179 Greens sætning i planen. *Lad S være en lukket og begrænset mængde i planen. Antag, at randen for S (kaldet k) er en Jordan-kurve. Antag, at S er xy-elementær. Lad P og Q være kontinuerte funktioner af to variable i S med kontinuerte partielle afledede. Så gælder*

$$\int_k P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA \qquad (*)$$

når det forudsættes, at kurven k gennemløbes i positiv omløbsretning.

Bevis. Vi nøjes med at bevise sætningen i det tilfælde, hvor S selv er givet ved $S = \{(x,y)\,|g_1(x) \leq y \leq g_2(x), x \in [a,b]\}$, og også $S = \{(x,y)\,|h_1(y) \leq x \leq h_2(y), y \in [c,d]\}$, hvor $g_1, g_2 \in C^1([a,b])$ og $h_1, h_2 \in C^1([c,d])$. Vi viser først

$$\int_k P(x,y)dx = \int_S -\frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Da $S = \{(x,y)\,|g_1(x) \leq y \leq g_2(x), x \in [a,b]\}$, fås ved opløsning af planintegralet

$$\begin{aligned}
\int_S -\frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left[-P(x,y)\right]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\
&= \int_a^b \left(P\left(x, g_1(x)\right) - P\left(x, g_2(x)\right)\right) dx \\
&= \int_{k_1} P(x,y)dx - \int_{k_2} P(x,y)dx = \int_k P(x,y)dx
\end{aligned}$$

hvor k_1 og k_2 er graferne for henholdsvis g_1 og g_2 gennemløbet fra venstre mod højre. Sidste lighed gælder, fordi kurveintegralerne langs de lodrette liniestykker ($x = a$ og $x = b$) er 0. Da området S også kan beskrives som $S = \{(x,y)\,|h_1(y) \le x \le h_2(y), y \in [c,d]\}$, fås ganske analogt

$$\int_k Q(x,y)dy = \int_S \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

Ved addition af de to resultater fås Greens identitet. ■

Eksempel 180 . *Lad S være den trekant, der begrænses af koordinatakserne og linien $x + 2y = 2$. Lad $P(x,y) = 2xy$ og $Q(x,y) = 8x^2y$. Vi udregner begge sider af identiteten (*). Ifølge Greens sætning skulle vi få samme resultat ved de to udregninger. For planintegralet finder vi*

$$\begin{aligned} \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA &= \int_S (-2x + 16xy)\, dA \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (-2x + 16xy)\, dy \\ &= \int_0^2 \left[-2xy + 8xy^2\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^3 - 7x^2 + 6x\right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Kurveintegralet opdeler vi i 3 dele

$$\int_k P dx + Q dy = \int_{x-aksedelen} + \int_{skraa-del} + \int_{y-aksedelen}$$

hvor x-aksedelen parametriseres ved $(x,y) = (t,0)\,, t \in [0,2]\,,$ den skrå del ved $(x,y) = (2-2t,t)\,, t \in [0,1]\,,$ og y-aksedelen (dog i forkert retning) ved $(x,y) = (0,t)\,, t \in [0,1]\,.$ Hermed finder vi

$$\int_{x-aksedelen} = \int_0^2 P\,(t,0)\, dt = \int_0^2 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{skraa-del} &= \int_0^1 \left\{P\,(2-2t,t)\cdot(-2) + Q\,(2-2t,t)\right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{2\,(2-2t)\,t\,(-2) + 8\,(2-2t)^2\,t\right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{24t - 56t^2 + 32t^3\right\} dt = \frac{4}{3} \\ \int_{y-aksedelen} &= -\int_0^1 Q(0,t)dt = -\int_0^1 0 dt = 0 \end{aligned}$$

hvor minustegnet ved y-aksedelen skyldes, at kurvestykket gennemløbes i forkert retning. Hermed har vi altså, at

$$\int_k Pdx + Qdy = \frac{4}{3}$$

Vi fandt altså (heldigvis) samme resultat som ved beregningen af planintegralet.

Eksempel 181 *Af Greens sætning kan udledes en formel til beregning af arealet af en mængde v.hj.a. et kurveintegral. Tages nemlig* $P(x,y) = 0$ *og* $Q(x,y) = x$ *fås af Greens sætning, at*

$$\int_k xdy = \int_S 1dA = A(S)$$

Ved i stedet at tage $P(x,y) = -y$ *og* $Q(x,y) = 0$ *fås af Greens sætning, at*

$$\int_k -ydx = \int_S 1dA = A(S)$$

En ofte set tredie version er

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_k -ydx + xdy$$

Som illustration lad os udregne arealet af den begrænsede mængde S*, der ligger indenfor den lukkede kurve* k *givet ved parameterfremstillingen* $(x,y) = (t\cos t, \sin 2t)\,, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*. Bemærk først, at kurven gennemløbes i negativ omløbsretning. Under hensyntagen hertil finder vi, hvis vi bruger den førstnævnte arealformel*

$$\begin{aligned} A(S) &= -\int_k xdy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \cdot 2\cos 2t\; dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\cos t + \cos 3t)\; dt = \frac{10}{9} - \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

Eksempel 182 *Vi vil udregne kurveintegralet*

$$\int_k \left(x^2 + y^2 + y^3\right) dx + 3xy^2 dy$$

hvor k *er kurven givet i polære koordinater ved* $r = \theta\cos\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *og gennemløbet i positiv omløbsretning. Kurven er en Jordan-kurve. Vi bruger Greens* *sætning og finder*

$$\begin{aligned}
\int_k \left(x^2+y^2+y^3\right)dx + 3xy^2dy &= \int_S -2ydA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\theta\cos\theta} \left(-2r\sin\theta\right) rdr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin\theta \left[-\frac{2}{3}r^3 \right]_0^{\theta\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \sin\theta \cos^3\theta d\theta = -\frac{1}{128}\pi^3 + \frac{15}{256}\pi
\end{aligned}$$

6.0.4 Eksakt differentialform

Definition 183 *En differentialform ω givet i mængden S kaldes eksakt i S, hvis den i ethvert punkt af S er differentialet af en funktion f, altså hvis $\omega = df$ overalt i S. Anderledes sagt: Differentialformen $\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ kaldes eksakt i S, hvis der findes en funktion f, der er differentiabel overalt i S, så*

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= F_1(x,y) \\
f_y(x,y) &= F_2(x,y)
\end{aligned}$$

for alle $(x,y)\in S$. I bekræftende fald kaldes en sådan funktion f for en stamfunktion til ω i S.

Eksempel 184 *Differentialformen ω givet i mængden S uden for ellipsen $x^2 + 3y^2 = 1$ ved*

$$\omega = \frac{2x}{x^2+3y^2-1}dx + \frac{6y}{x^2+3y^2-1}dy$$

er eksakt i S. Vi har nemlig, at funktionen

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+3y^2-1\right)$$

opfylder

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+3y^2-1} \\
f_y(x,y) &= \frac{6y}{x^2+3y^2-1}
\end{aligned}$$

for alle $(x,y)\in S$. Funktionen f er dermed en stamfunktion til ω i S.

Bemærkning 185 *Det er klart, at hvis f er en stamfunktion til en differentialform ω i en mængde S, så er $f+C$ også en stamfunktion for enhver reel konstant C. Er der andre stamfunktioner end dem, der fremkommer ved addition af en konstant til en given? Herom handler næste sætning.*

Sætning 186 *Lad S være en åben og sammenhængende mængde. Antag, at funktionen f har partielle afledede overalt i S, og at disse opfylder $f_x(x,y)=0$ og $f_y(x,y)=0$ for alle $(x,y)\in S$. Så er f en konstant funktion i S.*

Bevis. Lad A og B være to vilkårlige punkter i S. Vi skal vise, at f har samme værdi i disse to punkter. Da S er åben og sammenhængende, kan A og B forbindes med en "trappeformet" kurve bestående af akseparallelle liniestykker. På ethvert vandret stykke har f samme værdi i start- og slutpunkt, da $f_x=0$. Ligeledes har på ethvert lodret stykke f samme værdi i start- og slutpunkt, da $f_y=0$. Heraf følger, at f har samme værdi i A og B. ■

Korollar 187 *Antag, at differentialformen ω givet i den åbne og sammenhængende mængde S er eksakt og har stamfunktionen f_1 i S. Så er samtlige stamfunktioner givet ved formlen*

$$f=f_1+C,\quad C\in R$$

Vi skal bruge et resultat, der minder lidt om resultatet i sætningen ovenfor.

Sætning 188 *Lad S være en åben mængde, der med hver to punkter (x_1,y_0) og (x_2,y_0) også indeholder liniestykket imellem punkterne (S er altså en "vandret stabel af linier"). Antag, at f overalt i S har en partiel afledet mht. x, og at $f_x(x,y)=0$ for alle $(x,y)\in S$. Så er $f(x,y)$ ikke afhængig af x, dvs. vi kan skrive $f(x,y)=h(y)$ for alle $(x,y)\in S$.*

Bevis. Vi skal blot vise, at for hver to punkter med samme y-koordinat (x_1,y_0) og (x_2,y_0) gælder, at $f(x_1,y_0)=f(x_2,y_0)$. Men dette følger umiddelbart af at $f_x(x,y_0)=0$ for alle $x\in[x_1,x_2]$. ■

Sætning 189 *Lad ω være differentialformen*

$$\omega=F_1(x,y)\,dx+F_2(x,y)\,dy$$

hvor F_1 og F_2 er kontinuerte i den åbne og sammenhængende mængde S. Så gælder, at ω er eksakt i S, hvis og kun hvis $\int_k\omega$ kun afhænger af kurven k's endepunkter (for enhver stykkevis C^1-kurve).

Bevis. Antag først, at ω er eksakt i S. Lad f være en stamfunktion. Lad k være en C^1-kurve i k givet ved $(x,y)=(p(t),q(t))$, $\quad t\in[a,b]$. Så har vi

$$\begin{aligned}\int_k\omega &= \int_a^b\left(F_1(p(t),q(t))\,p'(t)+F_2(p(t),q(t))\,q'(t)\right)dt\\ &= \int_a^b\left(f_x(p(t),q(t))\,p'(t)+f_y(p(t),q(t))\,q'(t)\right)dt\\ &= \int_a^b\frac{d}{dt}f(p(t),q(t))\,dt=\left[f(p(t),q(t))\right]_a^b\\ &= f(p(b),q(b))-f(p(a),q(a))\end{aligned}$$

Er kurven kun C^1 stykkevist, fås det samme resultat ved opdeling. Vi ser, at kurveintegralets værdi kun afhænger af endepunkterne $(p(b), q(b))$ og $(p(a), q(a))$.

Antag nu omvendt, at $\int_k \omega$ kun afhænger af kurven k's endepunkter. Vælg et fast punkt A i S. Lad $(x, y) \in S$ være et vilkårligt punkt. Så er kurveintegralet langs en kurve fra A til (x, y) uafhængig af kurvens forløb, altså kun afhængig af (x, y). Ved

$$f(x, y) = \int_A^{(x,y)} \omega$$

er der defineret en funktion i S. Vi vil vise, at f er en stamfunktion til ω. Vi viser, at f i ethvert punkt af S har en partiel afledet mht. x og, at denne er givet ved F_1. Lad da $(x, y) \in S$. Da S er åben vil det vandrette liniestykke mellem (x, y) og $(x + h, y)$ ligge helt i S, når blot $|h|$ er lille nok. Vi har så, at

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_A^{(x+h,y)} \omega - \int_A^{(x,y)} \omega\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \omega = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F_1(t, y)\, dt \\ &= F_1(\xi, y) \end{aligned}$$

hvor ξ ligger mellem x og $x + h$. Da F_1 er kontinuert følger det, at

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \to F_1(x, y)$$

for $h \to 0$. Altså har vi, at $f_x(x, y) = F_1(x, y)$. At vi også har $f_y(x, y) = F_2(x, y)$ følger på samme måde. Hermed er vist, at ω er eksakt i S med f som stamfunktion. ■

Bemærkning 190 *Er ω eksakt i S kan en stamfunktion f altså udregnes som et kurveintegral $f(x, y) = \int_A^{(x,y)} \omega$ fra et fast punkt til (x, y). Kurven fra A til (x, y) vælger man selv. Den skal selvfølgelig forløbe i S. Ofte er en kurve sammensat at to akseparallelle liniestykker et godt valg.*

Eksempel 191 *Betragt i mængden $S = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ differentialformen*

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Vi udregner kurveintegralet $\int_k \omega$ langs enhedscirklen med parametriseringen $(x, y) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Vi finder

$$\begin{aligned} \int_k \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Men kurven forbinder jo punktet $(1, 0)$ med sig selv, så hvis ω var eksakt i S, ville kurveintegralet være nul. Vi konkluderer, at ω ikke er eksakt i S.

Eksempel 192 *Betragt i R^2 differentialformen ω givet ved*

$$\omega = \left(2xe^{2y} + 3\cos x\right) dx + \left(\left(2x^2 + 2y + 1\right) e^{2y} + 8y\right) dy$$

Vi vil gerne afgøre, om ω er eksakt i S. I bekræftende fald vil vi bestemme samtlige stamfunktioner. Nu er det jo ikke nogen farbar vej at undersøge om kurveintegralet langs samtlige kurver fra et givet fast punkt til (x, y) giver samme resultat. Senere får vi et simpelt kriterium (krydsdifferentiationskriteriet), der hurtigt vil afsløre, om ω er eksakt. Her prøver vi en anden idé. Vi vælger et fast punkt. Lad os tage $A = (0, 0)$. Vi udregner kurveintegralet fra $(0, 0)$ til (x, y) langs den kurve k, der er sammensat af liniestykkerne, der forbinder $(0, 0)$ med $(x, 0)$ og igen med (x, y). Så finder vi

$$\begin{aligned} \int_k \omega &= \int_0^x \left(2te^0 + 3\cos t\right) dt + \int_0^y \left(\left(2x^2 + 2t + 1\right) e^{2t} + 8t\right) dt \\ &= \left[t^2 + 3\sin t\right]_0^x + \left[e^{2t}x^2 + e^{2t}t + 4t^2\right]_0^y = 3\sin x + e^{2y}\left(x^2 + y\right) + 4y^2 \end{aligned}$$

Hvis *ω er eksakt, så udgør dette udtryk (som vi vil kalde $f(x, y)$) en stamfunktion. Men vi kan nu blot ved differentiation afgøre, om udtrykket* er *en stamfunktion:*

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3\cos x + 2xe^{2y} \\ f_y(x, y) &= e^{2y}\left(2x^2 + 2y + 1\right) + 8y \end{aligned}$$

Vi ser, at højresiderne er $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$, henholdsvis. Altså er ω eksakt, og f er en stamfunktion. Samtlige fås ved addition af en arbitrær konstant. Den brugte metode er egentligt ikke så ringe endda.

Eksempel 193 *Lad ω være differentialformen*

$$\omega = \left(x^2 + y^2\right) dx + (3y + \sin x)\, dy$$

for alle $(x, y) \in S$, hvor S er en vilkårlig (ikke-tom) åben mængde i R^2. Vi vil vise, at ω ikke er eksakt i S (uanset hvordan S er valgt) . Senere får vi et håndfast kriterium til afgørelse heraf. Men hér prøver vi uden. Antag, at ω var eksakt. Så eksisterer der en i S differentiabel funktion f med

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= x^2 + y^2 \\ f_y(x, y) &= 3y + \sin x \end{aligned}$$

Vi ser af den første, at $f_{xy}(x, y) = 2y$. Af den anden ses, at $f_{yx}(x, y) = \cos x$. Begge udsagn gældende for alle $(x, y) \in S$. Men vi har en sætning, der siger, at hvis f har kontinuerte partielle afledede af første orden i en omegn af et punkt (a, b), og hvis f_{xy} eksisterer i denne omegn og er kontinuert i (a, b), så eksisterer $f_{yx}(a, b)$ og er lig med $f_{xy}(a, b)$. Men $f_x(x, y) = x^2 + y^2$ og $f_y(x, y) = 3y + \sin x$ er åbenbart kontinuerte overalt. Det samme er $f_{xy}(x, y) = 2y$. Altså burde vi have, at $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ overalt. Men det har vi jo åbenlyst ikke. Vi må konkludere, at ω ikke har nogen stamfunktion i S, altså at ω ikke er eksakt i S.

Vi giver nu et simpelt kriterium til afgørelse af, om en differentialform er eksakt i et område S. Men først en definition.

Definition 194 *Mængden $S \sqsubseteq R^2$ kaldes enkeltsammenhængende, hvis den er sammenhængende og desuden er "uden huller", dvs. at enhver lukket kurve, der forløber i S, kontinuerligt kan sammentrækkes til et punkt i S uden nogensinde at forlade S. Mængden S kaldes stjerneformet, hvis der findes et punkt A i S, så liniestykket mellem A og ethvert andet punkt i S ligger helt i S.*

Bemærkning 195 *En stjerneformet mængde er enkeltsammenhængende. Det modsatte gælder ikke.*

Sætning 196 *Lad ω være differentialformen*

$$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

givet i den åbne mængde S. Antag, at F_1 og F_2 (er kontinuerte og) har kontinuerte partielle afledede af første orden overalt i S. Vi har da

1. *Hvis ω er eksakt i S, så gælder, at*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

overalt i S.

2. *Hvis S er enkeltsammenhængende og hvis $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ overalt i S, så er ω eksakt i S.*

Bevis. Beviset for første del forløber som i eksemplet ovenfor. Vi antager altså, at ω er eksakt. Så eksisterer der en i S differentiabel funktion f med

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= F_1(x,y) \\ f_y(x,y) &= F_2(x,y) \end{aligned}$$

Da F_1 og F_2 antages at have partielle afledede i S, følger det, at $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ og, at $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Begge udsagn gældende for alle $(x,y) \in S$. Men vi har en sætning, der siger, at hvis f har kontinuerte partielle afledede af første orden i en omegn af et punkt (a,b), og hvis f_{xy} eksisterer i denne omegn og er kontinuert i (a,b), så eksisterer $f_{yx}(a,b)$ og er lig med $f_{xy}(a,b)$. Men $f_x = F_1$ og $f_y = F_2$ er åbenbart kontinuerte overalt. Desuden eksisterer f_{xy} og er kontinuert overalt, da F_1 antages at have kontinuerte partielle afledede overalt. Altså har vi, at $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ overalt. Dermed altså, at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ overalt.

Antag nu, at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ overalt i S. Vi skal vise, at ω er eksakt. Vi foretager i beviset den indskrænkende antagelse, at mængden S er stjerneformet, dvs. at der findes et punkt A i S, så liniestykket $L(x,y)$ mellem A og ethvert andet punkt i S ligger helt i S. Vi definerer nu funktionen f ved

$$f(x,y) = \int_{L(x,y)} \omega$$

Vi kan antage, at $A = (0,0)$. Liniestykket $L(x,y)$ kan da parametriseres ved $t \longmapsto (tx, ty), t \in [0,1]$. Hermed har vi

$$f(x,y) = \int_0^1 (F_1(tx,ty)\,x + F_2(tx,ty)\,y)\,dt$$

Vi skal nu udnytte, at integralet som funktion af x er differentiabelt, og at differentialkvotienten får ved differentiation under integraltegnet. Hermed fås

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \int_0^1 (F_{1,x}(tx,ty)\,tx + F_1(tx,ty) + F_{2,x}(tx,ty)\,ty)\,dt \\
&= \int_0^1 (F_{1,x}(tx,ty)\,tx + F_1(tx,ty) + F_{1,y}(tx,ty)\,ty)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(t\frac{d}{dt}F_1(tx,ty) + F_1(tx,ty)\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_1(tx,ty))\,dt = [tF_1(tx,ty)]_0^1 = F_1(x,y)
\end{aligned}$$

At $f_y = F_2$ ses på tilsvarende måde. Hermed er vist, at f er en stamfunktion til ω. ■

Bemærkning 197 *Da der i Greens sætning forekommer differensen* $-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}$ *er det nærliggende at forsøge et bevis for den foregående sætnings anden del v.hj.a. Greens sætning. Lad* k_1 *og* k_2 *være to kurver, der forbinder de samme to punkter. Vi skal vise, at kurveintegralet langs de to kurver giver samme resultat. Det er ækvivalent med at vise, at kurveintegralet langs den sammensatte kurve* k_1 *og* $-k_2$ *er nul. Den sammensatte kurve* k *er en lukket kurve. Tillader vi os at antage, at* k *er en Jordan-kurve, og at mængden* S_k *, som den omslutter, er xy-elementær, så kan vi benytte Greens sætning. Af denne fås*

$$\int_k \omega = \int_k F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \int_S \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA = 0$$

Dermed er altså ikke givet et egentligt bevis for den anden påstand, men den er måske blevet forlenet med en vis troværdighed!

Eksempel 198 *Lad igen* ω *være differentialformen*

$$\omega = \left(x^2 + y^2\right) dx + (3y + \sin x)\,dy$$

Vi vil v.hj.a. krydsdifferentiationskriteriet vise, at ω *ikke er eksakt i nogen åben ikke-tom mængde i* R^2*. Med*

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) &= x^2 + y^2 \\
F_2(x,y) &= 3y + \sin x
\end{aligned}$$

finder vi

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \cos x$$

der åbenbart ikke er lig med hinanden overalt i en ikke-tom åben mængde. Altså er ω ikke eksakt i nogen ikke-tom åben mængde.

Eksempel 199 *Betragt i R^2 differentialformen ω givet ved*

$$\omega = \left(2xe^{2y} + 3\cos x\right) dx + \left(\left(2x^2 + 2y + 1\right) e^{2y} + 8y\right) dy$$

Ved krydsdifferentiation fås, idet ω skrives som $F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy$

$$F_{1,y}(x, y) = 4xe^{2y}$$
$$F_{2,x}(x, y) = 4xe^{2y}$$

Da F_1 og F_2 åbenbart begge har kontinuerte partielle afledede i R^2, som jo er en åben og enkeltsammenhængende (endda stjerneformet) mængde, konkluderer vi, at ω er eksakt i R^2. Vi skal bestemme samtlige stamfunktioner. Lad f betegne en sådan. Så har vi

$$f_x(x, y) = F_1(x, y) = 2xe^{2y} + 3\cos x$$
$$f_y(x, y) = F_2(x, y) = \left(2x^2 + 2y + 1\right) e^{2y} + 8y$$

Af den første af disse fås ved ubestemt integration mht. x, at

$$f(x, y) = x^2 e^{2y} + 3\sin x + h(y)$$

Dette følger af, at vi iflg. en tidligere sætning af

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y) - \left(x^2 e^{2y} + 3\sin x\right)\right] = 0$$

kan slutte, at $f(x, y) - \left(x^2 e^{2y} + 3\sin x\right)$ ikke afhænger af x. Af $f(x, y) = x^2 e^{2y} + 3\sin x + h(y)$ ses ved differentiation mht. y, at

$$f_y(x, y) = 2x^2 e^{2y} + h'(y)$$

men vi har jo også, at $f_y(x, y) = \left(2x^2 + 2y + 1\right) e^{2y} + 8y$. Altså slutter vi, at $h'(y) = (2y + 1)\, e^{2y} + 8y$. Derefter finder vi

$$h(y) = \int \left((2y + 1)\, e^{2y} + 8y\right) dy = ye^{2y} + 4y^2 + C$$

hvor C er en integrationskonstant. Hermed har vi en formel for samtlige stamfunktioner

$$f(x, y) = \left(x^2 + y\right) e^{2y} + 3\sin x + 4y^2 + C$$

hvor $C \in R$.

Kapitel 7

Laplacetransformation

7.0.5 Definition af Laplacetransformationen

Definition 200 *Lad f være en reel (eller kompleks) funktion, der er defineret på intervallet $[0, \infty[$. Hvis der findes et tal s_0, så integralet*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

eksisterer (er konvergent) for alle $s > s_0$, vil dette udtryk i s blive kaldt den Laplacetransformerede af f. Vi skal betegne den Laplacetransformerede af f med enten $\overline{f}$ eller $L\{f\}$ (måske undertiden F). Når den Laplacetransformerede af f eksisterer, er den altså givet ved

$$L\{f\}(s) = \overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

for alle $s > s_0$.

Bemærkning 201 *Hvad en given funktion f måtte være defineret til uden for intervallet $[0, \infty[$ er åbenbart irrelevant ved beregningen af dens Laplacetransformerede. Den uafhængige variable hedder næsten altid t, idet den ofte i anvendelserne står for tiden. Variablen, der bruges til beskrivelse af den Laplacetransformerede, hedder meget ofte s, men den har - selv ikke i anvendelserne - nogen fysisk betydning.*

Eksempel 202 *Lad f være den konstante funktion med værdien 1, altså $f(t) = 1$ for alle $t \geq 0$. Vi undersøger, om f har en Laplacetransformeret. Vi finder en stamfunktion H til $e^{-st} f(t) = e^{-st}$:*

$$H(t) = \int e^{-st} f(t)\, dt = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

Dette udtryk $H(t)$ har for $s > 0$ en grænseværdi for $t \to \infty$. Integralet $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ er derfor konvergent for $s > 0$, og vi har

$$L\{1\}(s) = \lim_{t \to \infty} H(t) - H(0) = \frac{1}{s}$$

eller anderledes skrevet

$$L\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

for $s > 0$.

Bemærkning 203 *Man ser tit skrevet* $L(f)$, *hvor vi prøver at skrive* $L\{f\}(s)$. *Eksempelvis skrives ofte* $L(1) = \frac{1}{s}$.

Eksempel 204 *Lad* f *være givet ved* $f(t) = t$ *for* $t \geq 0$. *Så har vi for* $s > 0$

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}tdt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}t\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}L\{1\}(s) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Vi har her brugt, at $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$ *for* $s > 0$.

Bemærkning 205 *Selv om det kan virke forvirrende på svage sjæle, ser man ofte skrivemåden:* $L(t) = \frac{1}{s^2}$. *Med en terminologi kendt fra Maple kunne en helt korrekt skrivemåde være*

$$L\{t \longmapsto t\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

hvis man da ikke har givet funktionen $t \longmapsto t$ *et navn, som vi faktisk gjorde i eksemplet ovenfor. Skrivemåden* $L(f(t))$ *må ikke få én til at tro, at* $L(f(t))$ *afhænger af en variabel* t. *Det gør den ikke. Den afhænger til gengæld af en variabel* s, *som slet ikke ses. Laplacekommandoen i Maple har syntaksen* laplace(f(t), t, s);

Eksempel 206 *Lad* f *være givet ved* $f(t) = t^2$ *for* $t \geq 0$. *Så har vi for* $s > 0$

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^2dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}t^2\right]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}tdt \\ &= 0 + \frac{2}{s}L\{t \to t\}(s) = \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

Vi har her brugt, at $\lim_{t\to\infty} t^2e^{-st} = 0$ *for* $s > 0$.

Eksempel 207 *Lad* f *være givet ved* $f(t) = t^3$ *for* $t \geq 0$. *Så har vi for* $s > 0$

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^3dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}t^3\right]_0^\infty + \frac{3}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^2dt \\ &= 0 + \frac{3}{s}L\left\{t \to t^2\right\}(s) = \frac{6}{s^4} \end{aligned}$$

Vi har her brugt, at $\lim_{t\to\infty} t^3e^{-st} = 0$ *for* $s > 0$.

Man begynder nok at kunne se et generelt resultat. Vi har da også følgende sætning.

Sætning 208 *For $n \in Z$, og $n \geq 0$ gælder*

$$L\{t \to t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

for $s > 0$. For $n = 0$ skal man erindre, at $0! = 0$ pr. definition. En kort (men let misforstået) skrivemåde for resultatet er

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Bevis. Beviset for denne påstand kan gøres ved induktion, idet vi har

$$\begin{aligned} L\left\{t \to t^{n+1}\right\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}t^{n+1}\right]_0^\infty + \frac{n+1}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s}L\{t \to t^n\}(s) = \frac{n+1}{s}L\{t \to t^n\}(s) \end{aligned}$$

antager vi derfor allede for en eller anden værdi af n vist, at $L\{t \to t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, så har vi derfor

$$L\left\{t \to t^{n+1}\right\}(s) = \frac{n+1}{s}L(t^n) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

hvormed formlen altså også gælder for det næste hele tal efter n, altså $n + 1$. Men vi ved, at formlen gælder for $n = 0$, derfor gælder den altså også for $n = 1$, og derfor for $n = 2$, og derfor for $n = 3$, osv. ■

Eksempel 209 *Lad f være givet ved $f(t) = e^{at}$ for $t \geq 0$, hvor a er en reel konstant. Så har vi for $s > a$*

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\ &= \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

På kort form: $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$.

Vi kan hurtigt generalisere dette resultat:

Sætning 210 *Lad g være en given funktion defineret på $[0, \infty[$. Antag, at g har en Laplacetransformeret $\overline{g}(s)$ defineret for $s > s_0$. Lad f være givet ved $f(t) = e^{at}g(t)$ for $t \geq 0$, hvor a er en reel konstant. Så har vi for $s > a + s_0$ at f også har en Laplacetransformeret og denne er givet ved*

$$L\{f\}(s) = L\{g\}(s - a)$$

Bevis. Beviset er let. For $s > a + s_0$ gælder

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}g(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}g(t)\,dt \\ &= L\{g\}(s-a) \end{aligned}$$

■

Eksempel 211 *Vi vil ved brug af sætningen ovenfor finde den Laplacetransformerede af funktionen* $t \longmapsto t^n e^{at}$*, når* n *er et helt ikke-negativt tal. Vi har*

$$L\left\{t \longmapsto t^n e^{at}\right\}(s) = L\{t \longmapsto t^n\}(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

eller på en kortere form

$$L\left\{t^n e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Eksempel 212 *Lad* f *være funktionen givet ved* $f(t) = \sin\omega t$ *for* $t \geq 0$ *Her er* ω *en reel konstant. Vi vil finde den Laplacetransformerede for* f*. Vi vil udnytte, at* $\sin\omega t = \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}\right)$*, samt at* $L\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}$ *selv når* $a \in C$*. Her må så forlanges, at* $s > \operatorname{Re} a$*. Hermed finder vi for* $s > 0$

$$\begin{aligned} L\{t \to \sin\omega t\}(s) &= L\left\{t \to \operatorname{Im} e^{i\omega t}\right\}(s) = \operatorname{Im} L\left\{t \to e^{i\omega t}\right\}(s) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{s - i\omega}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Hermed har vi også den Laplacetransformerede af $\cos\omega t$*:*

$$\begin{aligned} L\{t \to \cos\omega t\}(s) &= L\left\{t \to \operatorname{Re} e^{i\omega t}\right\}(s) = \operatorname{Re} L\left\{t \to e^{i\omega t}\right\}(s) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s - i\omega}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Før vi går videre, lad os bemærke, at Laplacetransformationen er en lineær operator. Dette er indholdet i følgende sætning.

Sætning 213 *Lad* f *og* g *begge have en Laplacetransformeret. Lad* k *være en konstant. Så har* $f + g$ *og* kf *en Laplacetransformeret, og der gælder*

$$\begin{aligned} L\{f+g\} &= L\{f\} + L\{g\} \\ L\{kf\} &= kL\{f\} \end{aligned}$$

Bevis. Følger af, at den Laplacetransformerede er et integral, og for integraler gælder en sådan påstand. ■

Bemærkning 214 *Advarsel: Den Laplacetransformerede af et produkt* fg *er* ikke *produktet af de Laplacetransformerede!*

For hvilke funktioner kan vi på forhånd garantere eksistensen af en Laplacetransformeret? Herom gælder en sætning, hvis formulering kræver en definition først.

Definition 215 *En reel (eller kompleks) funktion defineret på* $[0, \infty[$ *kaldes eksponentielt begrænset, hvis der eksisterer tal* $\alpha \in R$ *og* $M \in R_+$*, så*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

for alle $t \geq 0$*.*

Sætning 216 *Lad* f *være en på intervallet* $[0, \infty[$ *stykkevist kontinuert funktion. Antag, at* f *er eksponentielt begrænset. Så har* f *en Laplacetransformeret.*

Bevis. Vi udnytter sammenligningssætningen for uegentlige integraler. Denne blev tidligere formuleret for kontinuerte integrander, men den gælder også for stykkevist kontinuerte integrander. Vi har, at der findes tal $\alpha \in R$ og $M \in R_+$, så

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

for alle $t \geq 0$. Derfor har vi også, at

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$$

Men det uegentlige integral

$$\int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t} dt$$

er konvergent for $s > \alpha$. Altså er også det uegentlige integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

konvergent for $s > \alpha$. ■

Bemærkning 217 *Det ses let af beviset ovenfor, at det ikke er nødvendigt at kræve* f *eksponentielt begrænset. Det er tilstrækkeligt at antage om* f*, at det uegentlige integral*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} |f(t)|\, dt$$

er konvergent. Vi har jo for $s \geq \alpha$ *og alle* $t \geq 0$*, at*

$$e^{-st} |f(t)| \leq e^{-\alpha t} |f(t)|$$

hvorefter sammenligningssætningen som i beviset giver eksistensen af den Laplacetransformerede af f*.*

Eksempel 218 *Funktionen f givet ved*

$$f(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$$

for $t > 0$ er ikke eksponentielt begrænset efter den definition vi gav, men det uegentlige integral

$$\int_0^\infty e^{-3t} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-3t} \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

er konvergent, hvilket lettest ses ved opdeling

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Da vi for $0 < t \leq 1$ har

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

og da $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ er konvergent, er også $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ konvergent. Da vi for $t \geq 1$ har

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$$

og da $\int_1^\infty e^{-t} dt$ er konvergent, er også $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ konvergent. Dermed er så også $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ konvergent. Vi konkluderer, at den Laplacetransformerede $L\{f\}(s)$ eksisterer for $s \geq 3$. (Som det let ses, kan dette forbedres til $s > 2$). Den Laplacetransformerede kan iøvrigt udregnes til $\sqrt{\frac{\pi}{s-2}}$.

Der gælder følgende sætning, som vi

7.0.6 Eksistens af den inverse Laplacetransformation

Antag, at vi har udregnet den Laplacetransformerede af en funktion f og nedskrevet resultatet $\overline{f}$. Senere glemmer vi, hvilken funktion f, det var vi Laplacetransformerede. Kan vi finde f igen udfra kendskabet til $\overline{f}$? Er der evt. andre funktioner, der har samme Laplacetransformerede som f ? Et andet men beslægtet spørgsmål: Givet et udtryk i variablen s. Er dette udtryk den Laplacetransformerede af en eller anden funktion f ?

Vi skal her kun beskæftige os med det første spørgsmål, og endda kun med en del af det: Givet at et udtryk i den variable s faktisk er den Laplacetransformerede af en eller anden funktion. Er denne funktion entydigt bestemt?

For at forstå problemstillingen giver vi to simple eksempler.

Eksempel 219 *Funktionen f givet ved $f(t) = 4t$ giver ved integration fra 0 til 1*

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 4t\, dt = 2$$

Det samme giver funktionen g givet ved $g(t) = \pi \sin \pi t$:

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \pi \sin \pi t dt = [-\cos \pi t]_0^1 = 2$$

De to vidt forskellige funktioner f og g har samme bestemte integral på $[0,1]$.

Eksempel 220 *Funktionen f givet ved $f(t) = 4t$ giver ved integration fra 0 til x*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 4t dt = 2x^2$$

for alle $x \in R$. Alene udfra kendskabet til, at $\int_0^x f(t)\,dt = 2x^2$ for alle $x \in R$ kan vi bestemme f, dog med det forbehold, at vi kun søger en kontinuert funktion f. Er f nemlig kontinuert, så er funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ differentiabel med differentialkvotient givet ved $F'(x) = f(x)$. Men da også $F(x) = 2x^2$, har vi altså, at $f(x) = F'(x) = 4x$ for alle $x \in R$. Hermed er f rekonstrueret udfra F under forudsætning af, at f var kontinuert. Uden denne forudsætning er der uendeligt mange funktioner f, der opfylder $\int_0^x f(t)\,dt = 2x^2$ for alle $x \in R$, nemlig f.eks. de funktioner, der kun afviger fra det kontinuerte f i endeligt mange punkter.

Sætning 221 *Lad f og g være stykkevist kontinuerte funktioner på $[0,\infty[$, og lad begge være eksponentielt begrænsede. Så gælder, at hvis der eksisterer et tal s_0, så $L\{f\}(s) = L\{g\}(s)$ for alle $s > s_0$, så afviger f og g højst fra hinanden i deres springpunkter.*

Bevis. Beviset er desværre ret indviklet. Vi springer det over. ■

Definition 222 *Den inverse Laplacetransformation L^{-1} defineres på mængden af Laplacetransformerede stykkevist kontinuerte og eksponentielt begrænsede funktioner på følgende måde. Hvis $h = L\{f\}$, så defineres $L^{-1}\{h\}$ til f. Altså*

$$L^{-1}\{h\} = f \Longleftrightarrow h = L\{f\}$$

Vi må så leve med, at der kan blive diskussion om værdien af f i evt. springpunkter.

Eksempel 223 *Da $L\{t \to \sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ har vi, at $L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}(t) = \sin(\omega t)$. Enhver tabel over Laplacetransformerede kan også bruges som tabel over inverse Laplacetransformerede. Men ligesom en Engelsk-Dansk ordbog ikke er særlig egnet som Dansk-Engelsk ordbog, er det at foretrække at have en separat tabel over inverse Laplacetransformerede. I vore dage er det dog meget lettere at bruge et computerprogram som f.eks. Maple.*

7.0.7 Differentiationsreglen

Laplacetransformationens eksistensberettigelse skyldes primært den følgende sætning.

Sætning 224 *Lad på intervallet* $[0, \infty[$ *funktionen* f *være kontinuert og differentiabel på nær evt. i endeligt mange punkter. Antag, at* f' *er stykkevist kontinuert, og at* f *er eksponentielt begrænset, dvs.* $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. *Så gælder for* $s > \alpha$, *at*

$$L\{f'\}(s) = sL\{f\}(s) - f(0)$$

eller anderledes skrevet

$$L\{f'\}(s) = s\overline{f}(s) - f(0)$$

Hvis f *er en på intervallet* $[0, \infty[$ *differentiabel funktion for hvilken* f' *er kontinuert og differentiabel på nær evt. i endeligt mange punkter og eksponentielt begrænset, så gælder, at*

$$L\{f''\}(s) = s^2 L\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Bevis. Vi bemærker først, at formlen for delvis integration

$$\int_a^b g(t) f'(t)\, dt = [g(t) f(t)]_a^b - \int_a^b g'(t) f(t)\, dt$$

gælder, når blot f og g er kontinuerte og differentiable på nær evt. i endeligt mange punkter, og når f' og g' er stykkevist kontinuerte. Lad $T > 0$. Vi har ved delvis integration

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt &= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^T - \int_0^T -se^{-st} f(t)\, dt \\ &= e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Vi bruger nu, at der for alle $t \geq 0$ gælder

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \leq e^{-st} Me^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$$

således, at $\lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) = 0$, når $s > \alpha$. Endvidere ved vi, at f har en Laplacetransformeret, således at

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \to L\{f\}(s) = \overline{f}(s)$$

Hermed følger, at $\int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt$ har en grænseværdi for $T \to \infty$, dvs. at $L\{f'\}$ eksisterer, og at

$$\begin{aligned} L\{f'\}(s) &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) - f(0) + s \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \\ &= 0 - f(0) + s\overline{f}(s) \end{aligned}$$

Sætningens anden del fås ved gentagen anvendelse af den første, idet vi dog først bemærker, at f' eksponentielt begrænset medfører, at f også er eksponentielt begrænset. Herefter kan første del anvendes to gange således:

$$\begin{aligned} L\{f''\}(s) &= L\left\{(f')'\right\}(s) = sL\{f'\}(s) - f'(0) = s(sL\{f\}(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 L\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

■

Eksempel 225 *Da* $\frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t$ *har vi med kort skrivemåde*

$$\begin{aligned} \omega L\{\cos\omega t\} &= L\{\omega\cos\omega t\} = L\left\{\frac{d}{dt}\sin\omega t\right\} \\ &= sL\{\sin\omega t\} - \sin(\omega 0) = s\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

hvilket stemmer fint overens med, at vi tidligere fandt $L\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.

Eksempel 226 *Vi vil løse differentialligningen*

$$y' - y = \sin t$$

med begyndelsesværdibetingelsen $y(0) = 1$. *Idet vi forventer, at løsningen har en Laplacetransformeret, Laplacetransformerer vi begge sider af differentialligningen og får*

$$L\{y'\} - L\{y\} = L\{\sin t\}$$

altså har vi for s *tilstrækkeligt stor*

$$s\overline{y}(s) - y(0) - \overline{y}(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Heraf finder vi

$$(s-1)\overline{y}(s) = 1 + \frac{1}{s^2+1}$$

Altså fås

$$\begin{aligned} \overline{y}(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s^2+1)(s-1)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Hermed finder vi ved tilbagetransformation

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}$$

Eksempel 227 *Vi vil undersøge løsningen af en lineær differentialligning med konstante koefficienter ved Laplacetransformation. Betragt derfor differentialligningen*

$$ay'' + by' + cy = q(t)$$

hvor a, b *og* c *er reelle konstanter, og hvor* q *er en funktion defineret på* $[0, \infty[$, *som har en Laplacetransformeret. Ved Laplacetransformation fås*

$$a\left(s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + b(s\overline{y}(s) - y(0)) + c\overline{y}(s) = \overline{q}(s)$$

Efter omordning fås

$$\left(as^2 + bs + c\right)\overline{y}(s) = (as + b)y(0) + ay'(0) + \overline{q}(s)$$

Koefficienten til $\overline{y}(s)$ *genkender vi som karakterpolynomiet for differentialligningen. Videre fås*

$$\overline{y}(s) = \frac{(as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{\overline{q}(s)}{as^2 + bs + c}$$

Sålænge begyndelsesværdierne $y(0)$ *og* $y'(0)$ *ikke er givne, kan disse opfattes som arbitrære konstanter. Ved tilbagetransformation vil*

$$L^{-1}\left\{\frac{(as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c}\right\}$$

repræsentere den fuldstændige løsning til den homogene ligning og

$$L^{-1}\left\{\frac{\overline{q}(s)}{as^2 + bs + c}\right\}$$

en partikulær løsning til den inhomogene ligning. Betragt som konkret eksempel differentialligningen

$$y'' + y = \sin t$$

Her finder vi ved Laplacetransformation som ovenfor, at

$$\overline{y}(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Ved tilbagetransformation fås

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\cos t + y'(0)\sin t + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right\} \\ &= y(0)\cos t + y'(0)\sin t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{aligned}$$

Sætning 228 *Lad* f *være stykkevist kontinuert og eksponentielt begrænset på* $[0, \infty[$. *Så gælder, at*

$$L\{t \to tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}L\{f\}(s)$$

Bevis. Med $|f(t) \leq Me^{\alpha t}|$ har vi, at

$$L\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

er en differentiabel funktion af s, når $s > \alpha$. Desuden opnås differentialkvotienten ved blot at differentiere under integraltegnet. Hermed fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L\{f\}(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\, dt = -L\{t \to tf(t)\}(s) \end{aligned}$$

■

Eksempel 229 *Vi har med brug af kort form, at*

$$L\{t\cos t\} = -\frac{d}{ds} L\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

Da vi også har, at

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+1}{(s^2+1)^2}$$

finder vi altså, at

$$L\{\sin t - t\cos t\} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

Bemærk, at vi brugte dette resultat i eksemplet ovenfor.

Eksempel 230 *Vi kan genfinde resultatet* $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ *for* n *hel og ikke negativ ved brug af sætningen ovenfor på følgende måde. Vi går udfra* $L\{1\} = s^{-1}$. *Herefter finder vi*

$$\begin{aligned} L\{t\} &= L\{t \cdot 1\} = -\frac{d}{ds} L\{1\} = -\frac{d}{ds}\left(s^{-1}\right) = s^{-2} \\ L\left\{t^2\right\} &= L\{t \cdot t\} = -\frac{d}{ds} L\{t\} = -\frac{d}{ds}\left(s^{-2}\right) = 2s^{-3} \\ L\left\{t^3\right\} &= L\left\{t \cdot t^2\right\} = -\frac{d}{ds} L\left\{t^2\right\} = -\frac{d}{ds}\left(2s^{-3}\right) = 3!s^{-4} \end{aligned}$$

og så fremdeles.

7.0.8 Heavisides funktion. Forsinkelsesreglen.

Definition 231 *Heavisides funktion* u *er funktionen*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & for \quad t \geq 0 \\ 0 & for \quad t < 0 \end{cases}$$

Bemærkning 232 *Vi har defineret* $u(0) = 1$*. Hvilken værdi* $u(0)$ *tillægges er normalt ganske uinteressant. Vi vil derfor normalt ikke tage så tungt på, hvad værdien er i 0. I Maple er Heaviside(0) udefineret.*

Nytten af denne simple funktion ligger i, at enhver Tuborg-funktion kan udtrykkes uden brug af Tuborgklammer, når man tillader brugen af Heavisides funktion. Idéen kommer tydeligt frem i et eksempel.

Eksempel 233 *Der er givet funktionen* f *ved forskriften*

$$f(t) = \begin{cases} t^3 & for \quad t < 0 \\ t^2 & for \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & for \quad 1 \le t < \pi \\ \sin t & for \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Bemærk, at funktionsudtrykkene til højre er ordnet i kronologisk rækkefølge. Vi begynder nu med at konstatere, at

$$f(t) = t^3$$

for $t < 0$*. Derfor gælder stadigvæk, at*

$$f(t) = t^3 + u(t)(hvadsomhelst)$$

for $t < 0$*. Vi har jo nemlig, at* $u(t)(hvadsomhelst) = 0$ *for* $t < 0$*. Dernæst skriver vi*

$$f(t) = t^3 + u(t)\left(-t^3 + t^2\right) + u(t-1)(hvadsomhelst)$$

der gælder for alle $t < 1$*. Vi har jo, at* $u(t) = 1$ *for* $t > 0$ *og* $u(t-1) = 0$ *for* $t < 1$*. Næste skridt:*

$$f(t) = t^3 + u(t)\left(-t^3 + t^2\right) + u(t-1)\left(-t^2 + 1\right) + u(t-\pi)(hvadsomhelst)$$

der gælder for alle $t < \pi$*. Til sidst finder vi*

$$f(t) = t^3 + u(t)\left(-t^3 + t^2\right) + u(t-1)\left(-t^2 + 1\right) + u(t-\pi)(-1 + \sin t)$$

der gælder for alle $t \in R$*.*

Definition 234 *Lad* f *være en funktion defineret på* $[0, \infty[$ *og lad* $a > 0$*. For at have en kort og bekvem skrivemåde for mellemresultater sætter vi*

$$[f(t)]_{forsinket\ a} = u(t-a)\, f(t-a)$$

Sætning 235 *Lad* f *være en funktion, der har en Laplacetransformeret. Lad* $a > 0$*. Så gælder, at*

$$L\left\{[f(t)]_{forsinket\ a}\right\}(s) = L\{u(t-a)\, f(t-a)\}(s) = e^{-as} L\{f\}(s)$$

der også kan udtrykkes således

$$L\{t \to u(t-a) f(t)\}(s) = e^{-as} L\{t \to f(t+a)\}(s)$$

Den inverse form af den første version ser således ud, når F er en funktion, som har en invers Laplacetransformeret

$$L^{-1}\left\{e^{-as} F(s)\right\}(t) = \left[L^{-1}\{F\}(t)\right]_{forsinket\ a}$$

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned} L\{u(t-a) f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u(t-a) f(t-a)\, dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt = e^{-as} \int_a^\infty e^{-s(t-a)} f(t-a)\, dt \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-as} L\{f\}(s) \end{aligned}$$

idet vi har brugt substitutionen $\tau = t - a$. ■

Eksempel 236 *Vi vil finde den Laplacetransformerede af Tuborgfunktionen fra eksemplet ovenfor. Vi fandt, at*

$$f(t) = t^3 + u(t)\left(-t^3 + t^2\right) + u(t-1)\left(-t^2 + 1\right) + u(t-\pi)(-1 + \sin t)$$

for alle $t \in R$. Nu er det jo ved Laplacetransformation kun $t \geq 0$, der er af interesse. Så vi kan skrive

$$f(t) = t^2 + u(t-1)\left(-t^2 + 1\right) + u(t-\pi)(-1 + \sin t)$$

gældende for $t \geq 0$. Ved Laplacetransformation fås nu

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= L\left\{t^2\right\} + L\left\{u(t-1)\left(-t^2+1\right)\right\} + L\{u(t-\pi)(-1+\sin t)\} \\ &= \frac{2}{s^3} + e^{-s} L\left\{-(t+1)^2 + 1\right\} + e^{-\pi s} L\{-1 + \sin(t+\pi)\} \\ &= \frac{2}{s^3} + e^{-s} L\left\{-t^2 - 2t\right\} + e^{-\pi s} L\{-1 - \sin t\} \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right) - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

Eksempel 237 *Vi vil for $t \geq 0$ løse differentialligningen*

$$y' + 2y = q(t)$$

hvor

$$q(t) = \begin{cases} 4t & for \quad t < 3 \\ 0 & for \quad t \geq 3 \end{cases}$$

og hvor begyndelsesbetingelsen er $y(0)=0$. Vi omskriver først q v.hj.a. Heavisides funktion. Vi finder

$$q(t)=4t+u(t-3)(-4t+0)=4t-u(t-3)\,4t$$

Ved Laplacetransformation findes

$$\overline{q}(s)=\frac{4}{s^2}-e^{-3s}L\{4(t+3)\}=\frac{4}{s^2}-e^{-3s}\left(\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s}\right)$$

og differentialligningen giver

$$s\overline{y}(s)-y(0)+2\overline{y}(s)=\overline{q}(s)$$

Heraf fås, da $y(0)=0$, at

$$\begin{aligned}\overline{y}(s) &= \frac{\overline{q}(s)}{s+2}=\frac{\frac{4}{s^2}-e^{-3s}\left(\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s}\right)}{s+2}\\ &= \frac{4}{s^2(s+2)}-e^{-3s}\left(\frac{4}{s^2(s+2)}+\frac{12}{s(s+2)}\right)\end{aligned}$$

Ved tilbagetransformationen kan vi udnytte, at

$$\begin{aligned}\frac{12}{s(s+2)} &= \frac{6}{s}-\frac{6}{s+2}\\ \frac{4}{s^2(s+2)} &= \frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

således at

$$\begin{aligned}L^{-1}\left\{\frac{12}{s(s+2)}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{6}{s}-\frac{6}{s+2}\right\}=6-6e^{-2t}\\ L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s+2)}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}\right\}=2t-1+e^{-2t}\end{aligned}$$

Hermed har vi

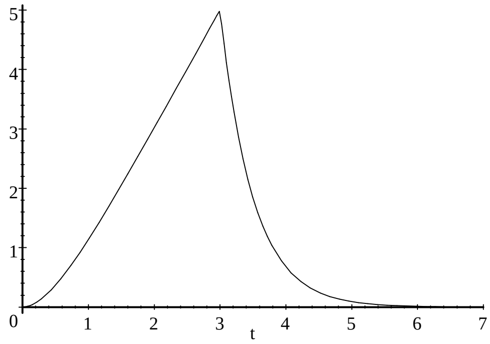
$$\begin{aligned}y(t) &= 2t-1+e^{-2t}-\left[2t-1+e^{-2t}+6-6e^{-2t}\right]_{forsinket\ 3}\\ &= 2t-1+e^{-2t}-u(t-3)\left(2(t-3)-1+e^{-2(t-3)}+6-6e^{-2(t-3)}\right)\\ &= 2t-1+e^{-2t}-u(t-3)\left(2t-1-5e^{-2(t-3)}\right)\end{aligned}$$

Løsningen til differentialligningen er altså skrevet på Tuborgfacon

$$y(t)=\begin{cases}2t-1+e^{-2t} & for \quad t<3\\ e^{-2t}+5e^{-2(t-3)} & for \quad t\geq 3\end{cases}$$

Her følger et plot af løsningen

$$\begin{cases}2t-1+e^{-2t} & if \quad t<3\\ e^{-2t}+5e^{-2(t-3)} & if \quad t\geq 3\end{cases}$$



Skulle differentialligningen løses på den sædvanlige måde uden brug af Laplace-transformation, kunne man gøre som følger. Ligningen er lineær. Panserformlen giver (når vi bruger den version, der bruger bestemte integraler)

$$y(t) = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} q(\tau)\, d\tau + y_0 e^{-2t} = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} q(\tau)\, d\tau$$

Vi betragter nu først $t < 3$. Så fås

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} q(\tau)\, d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} 4\tau d\tau \\ &= e^{-2t}\left(2e^{2t}t - e^{2t} + 1\right) = 2t - 1 + e^{-2t} \end{aligned}$$

For $t \geq 3$ fås

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} q(\tau)\, d\tau = e^{-2t}\int_0^3 e^{2\tau} 4\tau d\tau + e^{-2t}\int_3^t e^{2\tau} 0 d\tau \\ &= e^{-2t}\int_0^3 e^{2\tau} 4\tau d\tau = e^{-2t}\left(5e^6 + 1\right) \end{aligned}$$

Vi har altså (heldigvis) fundet samme resultat som ved Laplacetransformation.

7.0.9 Diracs deltafunktion

Betragt en omrørt tank med gennemstrømning. Tankens rumfang er V. Strømningshastigheden er F (volumen/tid). Vi holder regnskab med koncentrationen at et stof A. Stoffet omdannes ikke på nogen måde i tanken. Den indkommende koncentration af stof A er til tiden t givet ved $q(t)$, hvor q er en kendt stykkevist konrtinuert (og eksponentielt begrænset) funktion. Koncentrationen af stof A til tiden t er $y(t)$. Begyndelseskoncentrationen er y_0. Differentialligningen for massebalancen får nu formen

$$\frac{d}{dt}\left(Vy(t)\right) = Fq(t) - Fy(t)$$

Denne ligning kan løses v.hj.a. enten Panserformlen eller Laplacetransformation.

Nu sker der imidlertid følgende:
Til tiden $t = a$, hvor $a > 0$, smides m kg A i tanken. Dette tænkes at foregå meget hurtigt, og omrøringen forudsættes at være meget effektiv. Ideelt set foregår tilsætningen momentant, og må derfor have den virkning, at koncentrationen af stof A i tanken pludseligt ændrer sig med størrelsen $\frac{m}{V}$. I den ideelle situation, hvor tilsætningen ikke tager nogen tid, har koncentrationen $y(t)$ altså en springdiskontinuitet i punktet $t = a$. For $t < a$ gælder differentialligningen for massebalancen stadigvæk. Det gør den imidlertid også for $t > a$. For $t = a$ giver den slet ingen mening, idet $y(t)$ ikke engang er kontinuert for $t = a$, og derfor selvfølgelig heller ikke diffferentiabel.

En måde at at løse dette nye problem på, er følgende:

1. Løs differentialligningen for $t \in [0, a[$ v.hj.a. Panserformlen og brug af begyndelsesværdien $y(0) = y_0$. Bestem grænseværdien $y_1 = \lim_{t\uparrow a} y(t)$. Dette gøres i realiteten ved blot at indsætte $t = a$ i den for $t \in [0, a[$ fundne løsning.

2. Løs differentialligningen for $t \in [a, \infty[$ v.hj.a. Panserformlen og brug af begyndelsesværdien $y(a) = y_1 + \frac{m}{V} = \lim_{t\uparrow a} y(t) + \frac{m}{V}$.

Den beskrevne metode er overkommelig i det simple tilfælde, som vi her betragter. En anden metode, der udnytter Laplacetransformationen, har den fordel, at den i mere komplicerede sammenhænge er betydeligt lettere at bruge. Vi beskriver nu denne metode.

Vi vil først forestille os, at tilsætningen af stof A sker over et lille tidsrum omkring tidspunktet a, lad os sige $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, hvor $0 < \varepsilon < a$. Vi forestiller os, at den pr. tidsenhed tilførte stofmængde A er givet ved $m\delta_\varepsilon(t - a)$, hvor funktionen δ_ε er en (stykkevist kontinuert) funktion, som er ikke-negativ, lig nul udenfor intervallet $[-\varepsilon, \varepsilon]$ og opfylder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

Herved opnås, at den totalt tilførte masse af stof A er

$$\int_0^{\infty} m\delta_\varepsilon(t - a)\, dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} m\delta_\varepsilon(t - a)\, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} m\delta_\varepsilon(\tau)\, d\tau = m$$

Differentialligningen for massebalancen bliver nu

$$\frac{d}{dt}(Vy_\varepsilon(t)) = Fq(t) - Fy_\varepsilon(t) + m\delta_\varepsilon(t - a)$$

Vi er naturligvis ikke i praksis i stand til at givet forløbet af funktionen δ_ε. Den faktiske situation i det beskrevne tilfælde er jo, at der i et kort tidsrum omkring $t = a$ overhovedet ikke er nogen veldefineret koncentration i tanken, i hvertfald ikke en koncentration, der er uafhængig af positionen i tanken. Brugen af funktionen δ_ε er altså en fiktion, ligeså vel som det er fiktion at tro, at tilsætningen kan foregå momentant. Vi forfølger dog tankegangen. Vi vil undersøge, hvad der sker, hvis vi løser differentialligningen ved Laplacetransformation og derefter lader $\varepsilon \to 0$. Først må vi derfor undersøge den Laplacetransformerede af $\delta_\varepsilon(t-a)$, specielt hvad angår grænseværdien for $\varepsilon \to 0$, hvis den da ellers eksisterer. Vi finder

$$L\{\delta_\varepsilon(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt$$

Vi vil vise, at grænseværdien for $\varepsilon \to 0$ for dette udtryk er e^{-as}. Beviset forløber således, når vi forudsætter, at $s > 0$:

$$\begin{aligned}
\left|L\{\delta_\varepsilon(t-a)\}(s) - e^{-as}\right| &= \left|\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt - e^{-as}\right| \\
&= \left|\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt - \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-as}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt\right| \\
&= \left|\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(e^{-st} - e^{-as}\right)\delta_\varepsilon(t-a)\,dt\right| \\
&\le \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-as}\left|e^{-s(t-a)} - 1\right|\delta_\varepsilon(t-a)\,dt \\
&= e^{-as}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|e^{-s\tau} - 1\right|\delta_\varepsilon(\tau)\,d\tau \le e^{-as}\left(e^{\varepsilon s} - 1\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_\varepsilon(\tau)\,d\tau \\
&= e^{-as}\left(e^{\varepsilon s} - 1\right) \le e^{\varepsilon s} - 1
\end{aligned}$$

Vi kan altså til ethvert $s > 0$ gøre forskellen $L(\delta_\varepsilon(t-a)) - e^{-as}$ så lille numerisk set, som vi vil, ved blot at gøre ε lille. Vi har altså opnået det bemærkelsesværdige resultat, at selv om grænseværdien $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\delta_e(t-a)$ ikke eksisterer i nogen sædvanlig forstand, så eksisterer dog grænseværdien $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} L(\delta_e(t-a))$ og er lig med e^{-as}.

Vi finder ved Laplacetransformation, at

$$Vs\overline{y_\varepsilon}(s) - Vy_0 = F\overline{q}(s) - F\overline{y_\varepsilon}(s) + mL(\delta_e(t-a))$$

Heraf finder vi

$$\overline{y_\varepsilon}(s) = \frac{Vy_0 + F\overline{q}(s) + mL(\delta_e(t-a))}{Vs + F}$$

Vi ser, at højresiden har gænseværdien

$$\frac{Vy_0 + F\overline{q}(s) + me^{-as}}{Vs + F}$$

for $\varepsilon \to 0$. Som nævnt tidligere har det ideelle problem en løsning, der kan opnås ved brug af Panserformlen. Det er ikke urimeligt at formode, at denne løsning netop har Laplacetransformeret $\overline{y}(s)$ givet ved det fundne udtryk, altså

$$\overline{y}(s) = \frac{Vy_0 + F\overline{q}(s) + me^{-as}}{Vs + F}$$

Formodningen viser sig at holde i det konkrete tilfælde. Den foreslåede metode er nu som følger. Den momentane tilførsel af stof til tiden $t = a$ repræsenteres i massebalancen ved et tilførselsled $m\delta(t-a)$,

$$\frac{d}{dt}(Vy(t)) = Fq(t) - Fy(t) + m\delta(t-a)$$

hvor δ er Diracs deltafunktion, som egentlig ikke eksisterer som en funktion i sædvanlig forstand, idet den skulle være grænseværdien $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\delta_e(t)$, som er nul for $t \neq 0$ og ∞ for $t = 0$. Hvis denne stoftilførsel skal bringe en masse på m til tanken skal ikke desto mindre

$$\int_0^\infty m\delta(t-a)\,dt = m$$

altså

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = 1$$

for $a > 0$. Behandler man imidlertid deltafunktionen $\delta(t-a)$ som et (omend suspekt) udtryk, der har den Laplacetransformerede e^{-as}, så giver Laplacetransformation af massebalancen med efterfølgende inversion det samme resultat som fås ved den noget mere omstændelige metode, der først blev nævnt.

Bemærkning 238 *Efter P.A.M. Diracs brug af deltafunktionen i sin bog om kvantemekanik fra 1930 blev den og andre sådanne generaliserede funktioner gjort til genstand for omfattende studier og til skabelsen af et helt nyt område indenfor matematikken (distributionsteorien), først og fremmest af franskmanden Laurent Schwartz (Théorie des distributions, 1950-51).*

Eksempel 239 *Vi betragter en konkret version af det ovenfor beskrevne tankproblem. Betragt altså en omrørt tank med gennemstrømning. Tankens rumfang er* $3m^3$*. Strømningshastigheden er* $\frac{1}{2}m^3/h$*. Vi holder regnskab med koncentrationen at et stof A. Stoffet omdannes ikke på nogen måde i tanken. Den indkommende koncentration af stof A er til tiden t givet i* kg/m^3 *ved* $q(t)$*, hvor q er tuborgfunktionen*

$$q(t) = \begin{cases} 4 & for \quad t < 2 \\ 0 & for \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Til tiden $t = 5$*, smides 3 kg A i tanken. Dette tænkes at foregå meget hurtigt, og omrøringen forudsættes at være meget effektiv. Koncentrationen af stof A til tiden t er* $y(t)$*. Begyndelseskoncentrationen er* $1kg/m^3$*. Differentialligningen for massebalancen får nu formen*

$$\frac{d}{dt}(3y(t)) = \frac{1}{2}q(t) - \frac{1}{2}y(t) + 3\delta(t-5)$$

Denne ligning løser vi ved Laplacetransformation. Vi får

$$3s\overline{y}(s) - 3y(0) = \frac{1}{2}\overline{q}(s) - \frac{1}{2}\overline{y}(s) + 3e^{-5s}$$

Da $y(0) = 1$ *fås*

$$\overline{y}(s) = \frac{3 + \frac{1}{2}\overline{q}(s) + 3e^{-5s}}{3s + \frac{1}{2}}$$

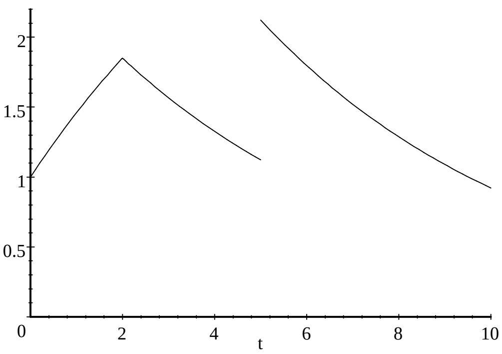
Før vi går videre, må vi beregne $\overline{q}(s)$. *Vi finder, at* $q(t) = 4 - 4u(t-2)$, *hvorfor vi har* $\overline{q}(s) = \frac{4}{s} - e^{-2s}\frac{4}{s}$. *Hermed har vi*

$$\begin{aligned}
\overline{y}(s) &= \frac{3 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{s} - e^{-2s}\frac{4}{s}\right) + 3e^{-5s}}{3s + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{3 + 3e^{-5s}}{3s + \frac{1}{2}} + \frac{2\left(1 - e^{-2s}\right)}{s\left(3s + \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1 + e^{-5s}}{s + \frac{1}{6}} + \frac{\frac{2}{3}\left(1 - e^{-2s}\right)}{s\left(s + \frac{1}{6}\right)}
\end{aligned}$$

Den sidste omskrivning blev gjort for at lette opslaget i den blå bogs tabel over Laplacetransformerede. Vi finder nu

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\frac{1}{6}t} + \left[e^{-\frac{1}{6}t}\right]_{forsinket\ 5} + \frac{2}{3}\left(6 - 6e^{-\frac{1}{6}t}\right) - \left[\frac{2}{3}\left(6 - 6e^{-\frac{1}{6}t}\right)\right]_{forsinket\ 2} \\
&= e^{-\frac{1}{6}t} + u(t-5)\,e^{-\frac{1}{6}(t-5)} + 4\left(1 - e^{-\frac{1}{6}t}\right) - 4u(t-2)\left(1 - e^{-\frac{1}{6}(t-2)}\right) \\
&= \begin{cases} 4 - 3e^{-\frac{1}{6}t} & for \quad t < 2 \\ e^{-\frac{1}{6}t}\left(4e^{\frac{1}{3}} - 3\right) & for \quad 2 \le t < 5 \\ e^{-\frac{1}{6}t}\left(4e^{\frac{1}{3}} - 3 + e^{\frac{5}{6}}\right) & for \quad t \ge 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 - 3e^{-\frac{1}{6}t} & if \quad t < 2 \\ e^{-\frac{1}{6}t}\left(4e^{\frac{1}{3}} - 3\right) & if \quad 2 \le t < 5 \\ e^{-\frac{1}{6}t}\left(4e^{\frac{1}{3}} - 3 + e^{\frac{5}{6}}\right) & if \quad t \ge 5 \end{cases}$$



7.0.10 Differentialligninger med forsinkelse

I de differentialligninger vi har mødt i dette kursus såvel som i tidligere kurser forekom værdier af den ubekendte funktion og dens afledede kun taget til samme tidspunkt overalt i ligningen, eksempelvis betyder ligningen $y' + 3y = \sin t$, at både y og y' evalueres til samme tidspunkt t. Lidt mere udførligt kan differentialligningen jo også skrives $y'(t) + 3y(t) = \sin t$. I mange anvendelser kan den ubekendte funktion imidlertid optræde evalueret til forskellige tidspunkter i den differentialligning, der styrer tidsudviklingen. Vi giver først et (ved første øjekast tilsyneladende) simpelt eksempel på en sådan differentialligning.

Eksempel 240 *Betragt differentialligningen*

$$y'(t) = ay(t - T)$$

hvor $T > 0$ og $a > 0$. I denne differentialligning kunne $y(t)$ betegne et antal individer til tiden t. Den opstillede matematiske model for tilvæksten pr. tidsenhed til tiden t siger altså, at denne er proportional med det antal individer der fandtes til tiden $t - T$ (tænk blot på, at det for et menneske tager 9 måneder fra undfangelse til fødsel). For at kunne bestemme $y(t)$ for al fremtid må man kende antal individer i tidsintervallet $[-T, 0]$. Lad os altså forestille os differentialligningen er givet med begyndelsesbetingelsen

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-T, 0]$$

hvor ϕ er en stykkevist kontinuert funktion. Vi skal løse dette begyndelsesværdiproblem ved Laplacetransformation nedenfor, men viser først, hvordan det kan løses uden.

1. ***Trinvis løsning.*** *Ved integration af differentialligningen fra 0 til t fås, når $0 < t < T$*

$$y(t) - y(0) = \int_0^t ay(\tau - T)\, d\tau = \int_0^t a\phi(\tau - T)\, d\tau$$

dvs. at for $0 < t < T$ har vi løsningen $y(t) = y_1(t)$, hvor y_1 er givet ved

$$y_1(t) = y(0) + \int_0^t a\phi(\tau - T)\, d\tau$$

For $T < t < 2T$ kan vi på samme måde finde $y(t) = y_2(t)$ med y_2 givet ved

$$y_2(t) = y_1(T) + \int_T^t ay_1(\tau - T)\, d\tau$$

For $2T < t < 3T$ finder vi $y(t) = y_3(t)$ med y_3 givet ved

$$y_3(t) = y_2(2T) + \int_{2T}^t ay_2(\tau - T)\, d\tau$$

Vi kan åbenbart fortsætte på denne måde og får altså løsningen bestemt som en tuborgfunktion med uendeligt mange dele. Det er ikke svært at programmere dette (f.eks. i Maple), så løsningen kan bestemmes til et vilkårligt tidspunkt.

2. ***Løsning ved Laplacetransformation.*** *Vi finder*

$$\begin{aligned} s\overline{y}(s) - y(0) &= a\int_0^\infty e^{-st} y(t-T)\,dt = ae^{-sT}\int_0^\infty e^{-s(t-T)} y(t-T)\,dt \\ &= ae^{-sT}\int_{-T}^\infty e^{-s\tau} y(\tau)\,d\tau = ae^{-sT}\left(\int_{-T}^0 e^{-s\tau}\phi(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty e^{-s\tau} y(\tau)\,d\tau\right) \\ &= ae^{-sT}\int_{-T}^0 e^{-s\tau}\phi(\tau)\,d\tau + ae^{-sT}\overline{y}(s) \end{aligned}$$

hvoraf fås

$$\overline{y}(s) = \frac{y(0) + ae^{-sT}\int_{-T}^0 e^{-s\tau}\phi(\tau)\,d\tau}{s - ae^{-sT}}$$

Med et konkret og konstant ϕ givet ved $\phi(t) = 1$ for $-T \le t \le 0$ fås, idet $y(0) = \phi(0) = 1$, at

$$\overline{y}(s) = \frac{1}{s} + \frac{a}{s(s - ae^{-sT})}$$

Tilbagetransformation af dette udtryk lader sig gøre ved omskrivning af højreside til en uendelig række, idet man udnytter, at

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$$

når $|x| < 1$. Med $x = \frac{a}{s}e^{-sT}$ fås

$$\begin{aligned} \overline{y}(s) &= \frac{1}{s} + \frac{a}{s^2\left(1 - \frac{a}{s}e^{-sT}\right)} = \frac{1}{s} + \frac{a}{s^2}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{a}{s}e^{-sT}\right)^n \\ &= \frac{1}{s} + \sum_{n=0}^\infty \frac{a^{n+1}}{s^{n+2}} e^{-nsT} \end{aligned}$$

Tilbagetransformation led for led giver

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}(t-nT)^{n+1}u(t-nT) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}}{n!}(t-(n-1)T)^{n}u(t-(n-1)T) \\
&= 1+atu(t)+\frac{a^2}{2}(t-T)^2u(t-T)+\frac{a^3}{3!}(t-2T)^3u(t-2T)+\ldots \\
&= \begin{cases} 1 & for \quad t<0 \\ 1+at & for \quad 0\le t<T \\ 1+at+\frac{1}{2}a^2(t-T)^2 & for \quad T\le t<2T \\ 1+at+\frac{1}{2}a^2(t-T)^2+\frac{1}{3!}a^3(t-2T)^3 & for \quad 2T\le t<3T \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vi har altså med en del arbejde opnået den uendelige tuborgfunktion, som omtaltes under punkt 1. Nu må man nok sige, at den første metode var den simpleste. Resultatet er jo meget kompliceret, så et naturligt spørgsmål er, om ikke det komplicerede resultat kan erstattes af et simplere, når blot man accepterer en vis fejl. Betragter man et plot af den eksakte løsning, eller tænker man på den løsning, der svarer til $T=0$, *får man den tanke, om ikke løsningen kan approksimeres godt ved en eksponentialfunktion. Svaret er jo! Der gælder nemlig, at*

$$y(t)-ke^{wt}\to 0$$

for $t\to\infty$, *hvor* $w=\frac{LambertW(aT)}{T}$ *og* $k=\frac{a}{w(1+wT)}$. *Er eksempelvis* $a=T=1$, *fås* $w=LambertW(1)\cong 0.5671432904$ *og* $k=1.125119091$. *En tegning af grafen for forskellen mellem* $y(t)$ *og* ke^{wt} *viser, at denne forskel meget hurtigt bliver meget lille. En antydning af, hvor denne eksponentialfunktion kommer fra, fås ved at betragte løsningens Laplacetransformerede, der efter omskrivning, ser således ud*

$$\overline{y}(s)=\frac{1-e^{sT}}{s}+\frac{e^{sT}}{s-ae^{-sT}}$$

Specielt interessante er singulariteterne (polerne) for denne funktion. Funktionen har faktisk ingen singularitet i 0. *Det første led har nemlig grænseværdien* $-T$ *for* $s\to 0$. *Men* $\overline{y}(s)$ *har singulariteter i de punkter i den komplekse s-plan, hvor*

$$g(s)=s-ae^{-sT}=0$$

Ligningen har netop én reel rod (men uendeligt mange komplekse). Den reelle rod findes ved at omforme ligningen til

$$sTe^{sT}=aT$$

Men LambertW (x) er netop den reelle løsning w til $we^w = x$. Derfor fås, at den reelle singularitet er givet ved $sT =$ LambertW (aT), hvoraf fås

$$s = w = \frac{\text{LambertW}\,(aT)}{T}$$

Vi fratrækker nu et led af formen $\frac{k}{s-w}$ fra $\overline{y}(s)$ for at opnå, at den reelle singularitet forsvinder. Dette kræver, at

$$\lim_{s\to w}\left(\frac{1-e^{sT}}{s}+\frac{e^{sT}}{s-ae^{-sT}}-\frac{k}{s-w}\right)$$

eksisterer. Vi finder derved, at $k = \frac{a}{w(1+wT)}$. Den inverse Laplacetransformerede til $\frac{k}{s-w}$, altså ke^{wt} er nu "hovedbidraget" til $y(t)$. De andre bidrag kan vises, at gå mod nul for $t \to \infty$. En god erstatning for en uendelig stor tuborgfunktion er, at bruge tuborgudtrykket for $0 \le t \le nT$ for en lille værdi af n og derefter bruge ke^{wt} ($n = 3$ giver en maksimal fejl på 10^{-3}).

Eksempel 241 *Betragt et lukket system bestående af en omrørt tank med volumen V. I tanken befinder sig en opløsning af et stof A. Stoffets koncentration i tanken til tiden t kaldes $x(t)$. Fra tanken pumpes væsken gennem et langt rør tilbage i tanken. Strømningshastigheden er F. Opholdstiden i røret er T. Hvis ikke stoffet influeres af noget undervejs i røret eller undergår henfald heri, vil koncentrationen af stoffet ved ankomsten til tanken være den samme, som da det forlod tanken. Hvis klokken nu er t, var klokken dengang $t-T$ og koncentrationen derfor $x(t-T)$. Dette gælder dog ikke i tidsintervallet $[0,T]$, idet vi da får det oprindelige indhold af røret ud i tanken. Dette oprindelige indhold antages at være rent opløsningsmiddel. Vi antager, at koncentrationen i tanken selv er 1 til tiden 0, altså $x(0) = 1$. For at gøre problemet lidt mere spændende forestiller vi os, at turen rundt i røret får koncentrationen til at stige med en faktor k, således at koncentrationen ved ankomsten til tanken kl. t er $kx(t-T)$. Vi tillader $k \ge 0$, altså både $k < 1, k = 1$ og $k > 1$. Den indkommende strøm har koncentrationen*

$$\begin{cases} 0 & for \quad t < T \\ kx(t-T) & for \quad t \ge T \end{cases}$$

Dette udtryk kan skrives som $kx(t-T)\,u(t-T)$. Massebalance giver nu differentialligningen

$$\frac{d}{dt}(Vx(t)) = -Fx(t) + Fkx(t-T)\,u(t-T)$$

der ved indførelse af $a = \frac{F}{V}$ kan skrives

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + kax(t-T)\,u(t-T)$$

1. ***Trinvis løsning.*** *Vi bruger panserformlen i sin bestemte form. Er differentialligningen* $x'(t) + p(t)\,x(t) = q(t)$ *med begyndelsesværdien* $x(t_0) = x_0$*, så er løsningen*

$$x(t) = e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{P(\tau)} q(\tau)\, d\tau + x_0 e^{-P(t)}$$

hvor $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$*. Anvendt på differentialligningen*

$$\dot{x}(t) + ax(t) = kax(t-T)\,u(t-T)$$

med $q(t) = kax(t-T)\,u(t-T)$ *og med* $t_0 = nT$ *fås, idet* $p(t) = a$*, så* $P(t) = a(t - nT)$*, at*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a(t-nT)} \int_{nT}^{t} e^{a(\tau-nT)} kax(\tau-T)\,u(\tau-T)\,d\tau + x(nT)\,e^{-a(t-nT)} \\ &= e^{-at} \int_{nT}^{t} e^{at} kax(\tau-T)\,u(\tau-T)\,d\tau + x(nT)\,e^{-a(t-nT)} \end{aligned}$$

Heraf ses, at løsningen kan bestemmes trinvist, ganske som i eksemplet ovenfor. Sætter vi $y(t) = e^{at}x(t)$ *finder vi*

$$y(t) = y(nT) + kae^{aT} \int_{nT}^{t} y(\tau-T)\,u(\tau-T)\,d\tau$$

Med $n = 0$ *finder vi* $y(0) = x(0) = 1$*, så for* $0 \le t < T$ *fås*

$$y(t) = y(0) + kae^{aT} \int_{0}^{t} y(\tau-T)\,u(\tau-T)\,d\tau = 1$$

Heraf følger, at $x(t) = e^{-at}$*. Dernæst fås (med* $n = 1$*) for* $T \le t < 2T$*, at*

$$\begin{aligned} y(t) &= y(T) + kae^{aT} \int_{T}^{t} y(\tau-T)\,d\tau \\ &= 1 + kae^{aT}(t-T) \end{aligned}$$

Heraf følger, at

$$x(t) = e^{-at}\left(1 + kae^{aT}(t-T)\right)$$

Næste skridt giver for $2T \le t < 3T$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(2T) + kae^{aT} \int_{2T}^{t} y(\tau-T)\,d\tau \\ &= 1 + kae^{aT}T + kae^{aT} \int_{2T}^{t} \left(1 + kae^{aT}(\tau-2T)\right) d\tau \\ &= 1 + kae^{aT}(t-T) + \frac{1}{2}\left(kae^{aT}(t-2T)\right)^2 \end{aligned}$$

hvoraf fås

$$x(t) = e^{-at}\left(1 + kae^{aT}(t-T) + \frac{1}{2}\left(kae^{aT}(t-2T)\right)^2\right)$$

Man kan nu nok gætte det næste resultat.

2. ***Løsning ved Laplacetransformation.*** *Vi finder ved Laplacetransformation af $\dot{x}(t) = -ax(t) + kax(t-T)u(t-T)$*

$$s\overline{x}(s) - x(0) = -a\overline{x}(s) + kae^{-sT}\overline{x}(s)$$

hvoraf fås, da $x(0) = 1$, at

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{s + a - kae^{-sT}}$$

Dette udtryk kan omskrives til

$$\begin{aligned}\overline{x}(s) &= \frac{1}{(s+a)\left(1 - \frac{kae^{-sT}}{s+a}\right)} \\ &= \frac{1}{s+a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{kae^{-sT}}{s+a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n a^n e^{-snT}}{(s+a)^{n+1}}\end{aligned}$$

der ved ledvis tilbagetransformation giver

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n a^n}{n!}(t-nT)^n e^{-a(t-nT)}u(t-nT) \\ &= \begin{cases} 0 & for \quad t < 0 \\ e^{-at} & for \quad 0 \le t < T \\ e^{-at} + ka(t-T)e^{-a(t-T)} & for \quad T \le t < 2T \\ e^{-at} + ka(t-T)e^{-a(t-T)} + \frac{1}{2}(ka(t-2T))^2 e^{-at(t-2T)} & for \quad 2T \le t < 3T \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \end{cases}\end{aligned}$$

Dette er samme resultat, som vi fandt ved den trinvise løsningsmetode. En erstatning for denne uendelige tuborgfunktion kan fås ved (som i eksemplet ovenfor) at erstatte $\overline{x}(s)$ med det udtryk af formen $\frac{b}{s-w}$, der gør at forskellen

$$\overline{x}(s) - \frac{b}{s-w} = \frac{1}{s+a-kae^{-sT}} - \frac{b}{s-w}$$

ikke har nogen singularitet (pol) på den reelle akse. Udtrykket $\frac{1}{s+a-kae^{-sT}}$ har singulariteter hvor nævneren $g(s) = s + a - kae^{-sT}$ er nul. Dette udtryk har uendeligt mange nulpunkter i den komplekse plan. Kun ét af disse nulpunkter er reelt. Det nulpunkt er

$$w = -a + \frac{1}{T}LambertW\left(kaTe^{at}\right)$$

De andre nulpunkter har realdele, der er mindre end w. Værdien af konstanten b er $b = \frac{1}{g'(w)} = \frac{1}{1+T(w+a)}$. Hermed kan vi så erstatte $x(t)$ med be^{wt}, når t ikke er alt for lille. For små værdier af t kan tuborgudtrykket bruges.

7.0.11 Øvrige egenskaber ved Laplacetransformationen

Foruden de allerede nævnte sætninger om Laplacetransformationen (Linearitetsreglen, Dæmpningsreglen, Differentiationsreglen, Forsinkelsesreglen, Reglen om multiplikation med t^n) gælder der også følgende sætninger.

Sætning 242 ***Slutværdireglen.*** *Antag, at f er stykkevist kontinuert på $[0,\infty[$ og, at den Laplacetransformerede $\overline{f}(s)$ eksisterer for alle $s > 0$. Så gælder, at hvis $f(t) \to A$ for $t \to \infty$, så gælder også, at*

$$s\overline{f}(s) \to A$$

for $s \downarrow 0$. Dette gælder uanset, om A er et tal eller $A = \pm\infty$.

Bevis. Vi antager først, at A er et tal. Da f er stykkevist kontinuert og har en grænseværdi, må f være begrænset. Altså findes der et tal M, så $|f(t)| \le M$ for alle $t \ge 0$. Vi udnytter desuden, at

$$A = As\int_0^\infty e^{-st}dt$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned}\left|A - s\overline{f}(s)\right| &= \left|s\int_0^\infty e^{-st}Adt - s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| \\ &= \left|s\int_0^\infty e^{-st}(A - f(t))\,dt\right| \le s\int_0^\infty e^{-st}|A - f(t)|\,dt\end{aligned}$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være vilkårligt givet. Vi skal bestemme $\delta > 0$, så $0 < s < \delta$ medfører, at $\left|A - s\overline{f}(s)\right| < \varepsilon$. Bestem først $T > 0$, så $|A - f(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ for alle $t \ge T$. Hermed har vi

$$\begin{aligned}\left|A - s\overline{f}(s)\right| &\le s\int_0^\infty e^{-st}|A - f(t)|\,dt \\ &= s\int_0^T e^{-st}|A - f(t)|\,dt + s\int_T^\infty e^{-st}|A - f(t)|\,dt \\ &\le s\int_0^T e^{-st}|A - f(t)|\,dt + s\int_T^\infty e^{-st}\frac{1}{2}\varepsilon dt \\ &= s\int_0^T e^{-st}|A - f(t)|\,dt + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-sT} \le s\int_0^T e^{-st}2Mdt + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &= 2M\left(1 - e^{-Ts}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

Vælg nu $\delta > 0$ så lille, at $2M\left(1 - e^{-Ts}\right) < \frac{1}{2}\varepsilon$ for alle $s \in \left]0, \delta\right[$. Så har vi opnået det vi ville.

Hvis $A = \infty$, så skal vi vise, at $s\overline{f}(s) \to \infty$ for $s \downarrow 0$. Hvis vi til et givet (stort) tal S vælger T, så $f(t) \geq 3S$ for alle $t \geq T$, har vi for $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} s\overline{f}(s) &= s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + s\int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &\geq s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + s\int_T^\infty e^{-st} S dt \\ &= s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + 3Se^{-sT} \\ &\geq -s\int_0^T |f(t)|\, dt + 3Se^{-sT} \end{aligned}$$

Vælg nu $\delta > 0$, så første led er større end $-S$ for alle $s < \delta$ og så $e^{-sT} > \frac{2}{3}$. Så har vi for $0 < s < \delta$

$$s\overline{f}(s) \geq -s\int_0^T |f(t)|\, dt + 3Se^{-sT} \geq -S + 3S\frac{2}{3} = S$$

Tilfældet $A = -\infty$ klares ved at betragte $-f$ i stedet. ■

Bemærkning 243 *Forudsætningen om, at den Laplacetransformerede $\overline{f}(s)$ skal eksistere for alle $s > 0$ kan ikke undværes, når $f(t) \to \infty$ for $t \to \infty$. Betragt blot eksemplet $f(t) = e^{at}$, hvor $a > 0$. Vi har $\overline{f}(s) = \frac{1}{s-a}$ gældende for $s > a$. Glemmer vi dette forbehold og lader $s \to 0$ fås $s\overline{f}(s) \to 0$ i tilsyneladende modstrid med sætningens påstand.*

Eksempel 244 *Betragt den tank med forsinket tilbageføring, som vi betragtede i et eksempel ovenfor. Vi fandt, at den Laplacetransformerede af koncentrationen x var*

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{s + a - kae^{-sT}}$$

I tilfældet $k = 1$ forventer vi nok, at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ eksisterer. Vi kan da bestemme denne grænseværdi v.hj.a. slutværdireglen. Vi finder

$$s\overline{x}(s) = \frac{s}{s + a - ae^{-sT}}$$

og ser, at vi for $s \downarrow 0$ har et "$\frac{0}{0}$"problem. Ved brug af L'Hospitals regel fås, at

$$\lim_{s\downarrow 0} s\overline{x}(s) = \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{1 + aTe^{-sT}} = \frac{1}{1 + aT}$$

Bemærk, at slutværdireglen ikke kan benyttes for $k > 1$, da $\overline{x}(s)$ i dette tilfælde ikke eksisterer for alle $s > 0$. Derimod kan den udmærket bruges, når $k < 1$, i hvilket tilfælde vi uden større dikkedarer får

$$\lim_{s\downarrow 0} s\overline{x}(s) = 0$$

et resultat, som vi nok forventede.

Bemærkning 245 *Funktionen f givet ved $f(t) = \sin t$ for alle $t \geq 0$ har som bekendt den Laplacetransformerede $\overline{f}(s) = \frac{1}{s^2+1}$ gældende for $s > 0$. Vi har åbenbart, at*

$$\lim_{s \downarrow 0} s\overline{f}(s) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

Ikke desto mindre har $f(t)$ ingen grænseværdi for $t \to \infty$. Slutværdireglens "hvis ... så" kan altså ikke ændres til et "hvis og kun hvis".

Definition 246 *Lad f og g være to stykkevist kontinuerte funktioner defineret på $[0, \infty[$. Ved foldningen $f * g$ af f og g forstås funktionen defineret ved*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$$

for alle $t \geq 0$.

Bemærkning 247 *Uden for Laplacetransformationsteorien defineres foldningen normalt ved*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$$

for alle $t \in R$. Dette udtryk reduceres imidlertid til det i definitionen givne, hvis vi forudsætter, at $f(t) = g(t) = 0$ for $t < 0$.

Bemærkning 248 *Det kan relativt let vises, at hvis f og g er stykkevist kontinuerte og eksponentielt begrænsede, så har også $f * g$ disse egenskaber.*

Sætning 249 *Lad f og g være stykkevist kontinuerte og eksponentielt begrænsede på $[0, \infty[$. Så gælder, at*

$$L\{f * g\} = L\{f\} L\{g\}$$

Bevis. Vi har

$$L\{f * g\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \, d\tau \right) dt$$

Dette dobbeltintegral kan opfattes som et planintegral over området $S = \{(t, \tau) \in R^2 \, | t \geq 0 \wedge 0 \leq \tau$
Ved "at dreje hovedet" kan planintegralet skrives som et dobbeltintegral med modsat integrationsrækkefølge. Herved fås

$$\begin{aligned}
L\{f * g\}(s) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) g(\tau) \, dt \right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau) \, dt \right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) \left(\int_0^{\infty} e^{-sT} f(T) \, dT \right) d\tau \\
&= \left(\int_0^{\infty} e^{-sT} f(T) \, dT \right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau = L\{f\}(s) \, L\{g\}(s)
\end{aligned}$$

■

Eksempel 250 *Vi fandt tidligere ved behandlingen af differentialligningen*

$$ay'' + by' + cy = q(t)$$

at løsningen Laplacetransformerede er givet ved

$$\overline{y}(s) = \frac{(as+b)\,y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{\overline{q}(s)}{as^2 + bs + c}$$

Lad os betragte det konkrete tilfælde

$$y'' - 5y' + 6y = q(t)$$

hvor dog q ikke er konkret givet. Så fås

$$\begin{aligned} \overline{y}(s) &= \frac{(s-5)\,y(0) + y'(0)}{s^2 - 5s + 6} + \frac{\overline{q}(s)}{s^2 - 5s + 6} \\ &= \frac{3y(0) - y'(0)}{s-2} - \frac{2y(0) - y'(0)}{s-3} + \overline{q}(s)\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}\right) \end{aligned}$$

Tilbagetransformationen kan udtrykkes således, når foldningsreglen anvendes ved tilbagetransformationen af sidste led

$$\begin{aligned} y(t) &= (3y(0) - y'(0))\,e^{2t} - (2y(0) - y'(0))\,e^{3t} + \left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}\right\} * q\right)(t) \\ &= (3y(0) - y'(0))\,e^{2t} - (2y(0) - y'(0))\,e^{3t} + \left(\left(t \mapsto e^{3t} - e^{2t}\right) * q\right)(t) \\ &= (3y(0) - y'(0))\,e^{2t} - (2y(0) - y'(0))\,e^{3t} + \int_0^t \left(e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}\right) q(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Er eksempelvis $q(t) = e^{2t}$ får sidste led udseendet

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}\right) q(\tau)\,d\tau &= \int_0^t \left(e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}\right) e^{2\tau}\,d\tau \\ &= \int_0^t \left(e^{3t-\tau} - e^{2t}\right) d\tau = e^{3t} - e^{2t} - te^{2t} \end{aligned}$$

Hermed har løsningen formen

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - te^{2t}$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter, der afhænger af begyndelsesbetingelserne. Faktisk ser vi, at de er givet ved $c_1 = 3y(0) - y'(0) - 1$ og $c_2 = -2y(0) + y'(0) + 1$. Vi genkender den sædvanlige form for den fuldstændige løsning til en lineær differentialligning af anden orden.