Egenværdier og egenvektorer uden Maple

Et lille hjælpeeksempel på udregning af egenværdier og egenvektorer. Der er medtaget mange mellemregninger for dem der ikke lige kan huske den del af MAT1.

Indledende teori

Til bestemmelse af egenværdier løses følgende ligning (den karakteristiske ligning):

$$det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{1}$$

hvor **A** er den matrix hvis egenværdier ønskes. **I** er enhedsmatricen (1'taller i diagonalen og nul resten af stederne). λ er variablen der ønskes isoleres. $det(\,)$ er determinanten af matricen. For en 2x2 matrix er determinanten:

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a\,d - b\,c \tag{2}$$

Til hver egenværdi findes mindst én egenvektor (muligvis flere hvis der er dobbeltrødder eller højere algebraisk multiplicitet). Egenvektorene findes ved løsning af ligningen:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\vec{v} = 0; \tag{3}$$

her er $\vec{v}$ er den ubekendte (egenvektor) hørende til én λ-værdi. Egenvektoren kan f.eks. findes vha. Gauss elimination (se eksemplet).

Eksempel *Eksemplet her er forholdvis simpelt og udregningerne kan være en del mere indviklet, men proceduren er den samme ved mere 'besværlige' matricer.* Egenværdierne og egenvektorene for følgende matrix (**A**) ønskes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Egenværdierne findes vha (1):

$$\begin{aligned} det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ &\Downarrow \\ det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ &\Downarrow \\ (1-\lambda)(-2-\lambda) - 6\cdot 3 &= 0 \\ &\Downarrow \\ \lambda^2 + \lambda - 20 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Løsning af andengradsligningen[1] giver:

$$\lambda = 4 \quad \bigvee \quad \lambda = -5 \tag{6}$$

Så dermed har matricen egenværdierne 4 og -5. Til hver egenværdi findes tilhørende egenvektor(e) vha. (3):

[1]Polynomiet $Ax^2 + Bx + C$ har rødderne: $x = \frac{-B\pm\sqrt{D}}{2A}$, hvor $D = B^2 - 4AC$.

Egenvektor hørende til $\lambda = 4$

Vha. (3) kan egenværdiproblemet opskrives:

$$\begin{aligned}\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\vec{v} =& 0 \\ \Downarrow & \\ \left(\begin{bmatrix} 1-4 & 6 \\ 3 & -2-4 \end{bmatrix}\right)\vec{v} =& 0 \\ \Downarrow & \\ \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\vec{v} =& 0\end{aligned} \tag{7}$$

Dette problem kan opskrives på matrixform som kan løses vha. Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

Gausselimination (i korte træk) handler om at eliminere rækker i matricen ved at addere en af de andre rækker eller en konstant gange en af de andre rækker. Det ses af matricen at række 2 er det samme som række 1 gange -1. Dermed kan række 2 elimineres ved følgende handling $R_2 = R_2 + R_1$. Herefter kan række 2 simplificeres ved $R_1 = \frac{1}{3}R_1$ hvilket kan opskrives på følgende måde:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2=R_2+R_1 \\ R_1=\frac{1}{3}R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

Den resterende ligning kan opskrives som $-x_1 + 2x_2 = 0$ hvilket er én ligning med to ubekendte. Derfor fastsættes x_2 til en ny variabel w (kunne lige så godt være x_1 der fastsættes til w), og dermed opnås følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} x_2 =& w \\ x_1 =& 2x_2 = 2w, \end{aligned} \tag{10}$$

som på vektorform er:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad , w \neq 0 \tag{11}$$

(11) beskriver de uendelig mange egenvektorer der findes til $\lambda = 4$: heraf kan nævnes $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ som værende egenvektorer til $\lambda = 4$. Men bemærk at der her ikke findes flere en én uafhængig egenvektor her.

Egenvektor hørende til $\lambda = -5$

Samme fremgangsmåde som ovenstående giver egenvektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.