1 Kort om komplekse tal

Vi vil her give en kort gennemgang af de fleste basale egenskaber ved det komplekse tal.

1.1 Definition

De reelle tal $\mathbb{R}$ - mængden af alle positive, negative, rationale og irrationale tal $\{0, 1, 3/2, \pi, -e, \sqrt{7}, ...\}$ - udgør ofte den mængde af tal man arbejder med i matematik. Nogle gange kommer man dog i problemer, f.eks. hvis man ønsker at bestemme rødderne i ligningen

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

For at kunne løse ligningen, indføres tallet i som svarer til $\sqrt{-1}$. Dermed er løsningerne til (1) tallene $\pm i$, idet det er opfyldt at $(\pm i)^2 = -1$. Vha. tallet i kan man angive et komplekst tal z på formen

$$z = a + ib, \tag{2}$$

hvor a og b er reelle tal, der henholdsvis kaldes *real-* og *imaginærdelen* af z. Man skriver også

$$\mathrm{Re}\{a + ib\} = a \tag{3}$$

$$\mathrm{Im}\{a + ib\} = b. \tag{4}$$

Mængden af komplekse tal benævnes $\mathbb{C}$ og er en udvidelse af $\mathbb{R}$, idet mængden af komplekse tal med imaginærdel 0 netop udgør de reelle tal. Til de komplekse tal knyttes et begreb, *kompleks-konjugering*, hvilket benævnes $\overline{a + ib}$. Konjugering af et kompleks tal foregår ved at ændre fortegnet af af dens imaginære del. Et eksempel på et kompleks-konjugeret tal er $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$. Ved at konjugere endnu en gang kommer man tilbage til det oprindelige tal: $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$, dvs.

$$\overline{\overline{z}} = z. \tag{5}$$

1.2 Regneregler

Komplekse tal opfylder de samme regler som ved de reelle ved addition, subtraktion, multiplikation og division:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d), \tag{6}$$

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d), \tag{7}$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad - bd = ac - bd + i(bc + ad). \tag{8}$$

Da komplekse tal kan optræde i en brøk, kan det være nyttigt at omskrive denne brøk til samme form som i (2). Dette sker ved at gange nævneren med sin kompleks-konjugerede.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \tag{9}$$

1.3 Kompleks eksponentialfunktion

Den komplekse eksponentialfunktion defineres ved at tallet e opløftes til et komplekst tal $z = a + ib$, således at

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right). \tag{10}$$

1.4 Eksempler

- Givet en kompleks vektor $\mathbf{v} = \binom{3+i}{4}$, så er $\mathrm{Re}\{\mathbf{v}\} = \binom{3}{4}$ og $\mathrm{Im}\{\mathbf{v}\} = \binom{1}{0}$.
- Givet et produkt mellem en kompleks brøk og en kompleks eksponentialfunktion, $y(t) = \frac{3+4i}{4-2i}e^{(5+i)t}$, kan man bestemme real- og imaginærdel af $y(t)$ ved først at reducere $y(t)$, bl.a. vha. (9):

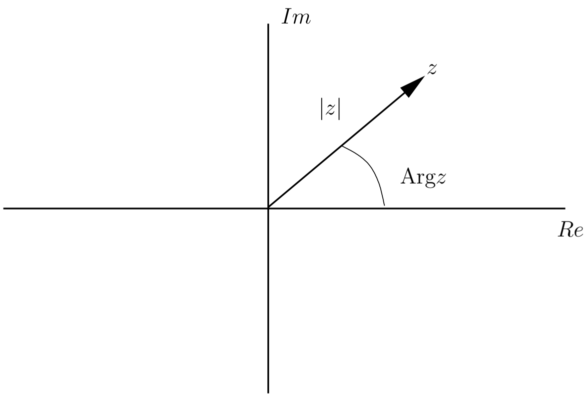
$$\begin{aligned}
\{y(t)\} &= \frac{3+4i}{4-2i}e^{(5+i)t} \\
&= \left(\frac{3\cdot 4 + 4\cdot(-2)}{4^2+(-2)^2} + i\frac{4\cdot 4 - 3\cdot(-2)}{4^2+(-2)^2}\right)e^{(5+i)t} \\
&= \left(\frac{1}{5} + i\frac{11}{10}\right)e^{(5+i)t} \\
&= \left(\frac{1}{5} + i\frac{11}{10}\right)e^{5t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) \\
&= e^{5t}\left(\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}i\sin(t) + i\frac{11}{10}\cos(t) - \frac{11}{10}\sin(t)\right).
\end{aligned}$$

Real- og imaginærdel ses da at være

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{y(t)\right\} &= e^{5t}\left(\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{11}{10}\sin(t)\right), \\
\mathrm{Im}\left\{y(t)\right\} &= e^{5t}\left(\frac{1}{5}\sin(t) + \frac{11}{10}\cos(t)\right).
\end{aligned}$$

1.5 Den komplekse talplan samt modulus og argument

Det er nyttigt at forestille sig de komplekse tal som liggende i et almindeligt koordinatsystem, hvor realdelen angives af førsteaksen og imaginærdelen af andenaksen. Ethvert punkt i planen, som kaldes den *komplekse talplan*, svarer så til et komplekst tal og omvendt. I stedet for at angive punktet vha. real- og imaginærdel kan man også benytte *modulus* og *argument*. Modulus af af et komplekst tal z benævnes ved $|z|$, og angiver afstanden fra origo til punktet i det komplekse plan. Modulus kaldes også den numeriske eller absolutte værdi af et komplekst tal.



Hvis det komplekse tal er givet som $z = a + ib$, kan modulus beregnes

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{11}$$

Argumentet til et komplekst tal angiver vinklen v fra den positive reelle akse i den komplekse plan til punktet. Denne angives som regel i intervallet $]-\pi, \pi]$ og kan beregnes som

$$\tan v = \frac{b}{a}. \tag{12}$$

For at isolere v benyttes den inverse funktion til tan, nemlig Arctan. Dette tager imidlertid ikke hensyn til hvilken kvadrant det komplekse tal befinder sig i, så man må evt. korrigere med $\pm\pi$. Til dette kan følgende skema benyttes:

$$\mathrm{Arg}(a+ib) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\frac{b}{a} & \text{når } a+ib \text{ ligger i 1. kvadrant,} \\ \mathrm{Arctan}\frac{b}{a} + \pi & \text{når } a+ib \text{ ligger i 2. kvadrant,} \\ \mathrm{Arctan}\frac{b}{a} - \pi & \text{når } a+ib \text{ ligger i 3. kvadrant,} \\ \mathrm{Arctan}\frac{b}{a} & \text{når } a+ib \text{ ligger i 4. kvadrant.} \end{cases} \tag{13}$$

Formlen kan illustreres ved f.eks. at betragte det komplekse tal $-1 + i$. Tallet befinder sig i 2. kvadrant med argumentet $\frac{3}{4}\pi$, men da $\mathrm{Arctan}\frac{1}{-1} = -\frac{1}{4}\pi$, er det tydeligt, at der må korrigeres ved at lægge π til.

1.6 Eksempel

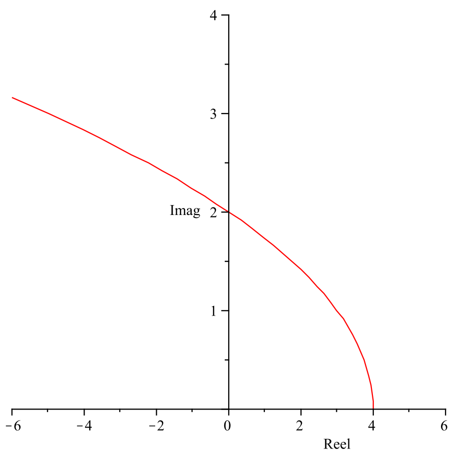
Der kan også være tale om en kompleks funktion, f.eks. $f(\omega) = -\omega^2 + i\omega + 4$. Funktionens forløb i den komplekse talplan er illustreret i den følgende figur. Hvis vi nu vil udregne modulus og argument af denne, skal vi først inddele den i den reelle og imaginære del.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{f(\omega)\} &= -\omega^2 + 4 \\ \mathrm{Im}\{f(\omega)\} &= \omega \end{aligned}$$

Så kan modulus nemt beregnes

$$|f(\omega)| = \sqrt{(-\omega^2 + 4)^2 + \omega^2}$$

For at beregne argumentet er det nødvendigt at bestemme hvilken kvadrant den komplekse funktion ligger i for alle værdier af ω. Vi kan f.eks. opstille en lille



ω	$f(\omega)$	Kvadrant
0	4	-
1	3+i	1.
2	2i	-
3	-5+3i	2
4	-12 +4i	2

tabel eller betragte figuren. Af tabellen ses at ved $\omega = 0$ befinder funktionen sig på den positive reelle akse, og ligeledes ved $\omega = 2$ befinder funktionen sig på den positive imaginære akse. Argumentet i disse to særtilfælde vil så henholdsvis være 0 og $\pi/2$. Da vi som regel kun kigger på komplekse funktioner med $\omega > 0$, kan vi nu vha. ligning (13) opskrive argumentet

$$\mathrm{Arg}\{f(\omega)\} = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\frac{\omega}{-\omega^2+4} & \text{for} \quad 0 < \omega < 2, \\ \pi/2 & \text{for} \quad \omega = 2, \\ \mathrm{Arctan}\frac{\omega}{-\omega^2+4} + \pi & \text{for} \quad \omega > 2. \end{cases}$$