Ekstra termodynamikopgaver i Fysik 1, 10022/24 F12

Opgave 1

Tre opfindere, A, B og C, fortæller dig at de hver har designet en varmemaskine. A's maskine kan udføre et arbejde på 110 J ved tilførsel af 250 J med en spildvarme 140 J. B's maskine kan udføre et arbejde på 90 J ved tilførsel af 250 J med en spildvarme på 170 J. C's maskine kan udføre et arbejde på 90 J ved tilførsel af 250 J med en spildvarme på 160 J. For alle tre maskiners vedkommende er det varme reservoir ved temperaturen 500 K og det kolde ved temperaturen 300 K.

a) To af maskinerne er ufysiske. Hvilke to maskiner er ufysiske og hvorfor ?

Opgave 2

En fleksibel ballon indeholder 0.355 mol H_2S. I begyndelsen har ballonen et volumen på 7050 cm^3 og en temperatur på 26 ^oC. Ballonen udvider sig nu isobart til den har det dobbelte volumen. Derefter ekspanderer den adiabatisk indtil temperaturen er på den oprindelige værdi. Gassen kan behandles som en ideal gas med $C_p = 34.60$ J/(mol K) og $\gamma = \frac{4}{3}$.

a) Hvor stor en varmemængde Q er tilført ballonen under den skitserede proces?
b) Hvor stor er ændringen i den indre energi ΔU af gassen.
c) Hvor meget arbejde W har gassen udført?
d) Hvad er ballonens volumen til slut?

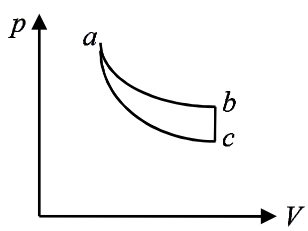
Opgave 3

En monoatomar ideal gas har tryk p_1 og temperatur T_1. Gassen befinder sig i en cylinder med volumen V_1, der er udstyret med et bevægeligt stempel, så det kan udføre arbejde på sine omgivelser. Vi betragter en kredsproces der består af følgende delprocesser: i) gassen opvarmes ved konstant volumen til den når trykket Ap_1 med $A > 1$; ii) gassen udvides ved konstant temperatur indtil dens tryk er tilbage til p_1; iii) gassen afkøles ved konstant tryk indtil volumenet er tilbage ved V_1. Alle svar bedes udtrykt ved p_1, V_1, A.

a) Hvor stor en varmemængde Q_{12} tilføres systemet ved første delproces?
b) Hvor meget arbejde W_{23} udføres af gassen i delproces 2?
c) Hvor meget arbejde W_{31} udføres af gassen under delproces 3?

Opgave 4

1.00 mol af en ideal, énatomig gas har i tilstanden a 1.00 atmosfæres tryk og temperaturen 293 K, og gennemgår en kredsproces, som skitseret i figuren. Først udvides gassen isotermt, så rumfanget forøges til 56.0 L. Dernæst trækkes varme ud af gassen ved konstant volumen, således at trykket i gassen falder. Endelig bliver gassen ved en adiabatisk kompression ført tilbage til starttilstanden.



a) Beregn trykkene p_b og p_c.
b) Bestem temperaturen T_c.
c) Bestem gassens entropiændring for den isochore proces.
d) Bestem virkningsgraden af varmemaskinen.

Opgave 5

En ideal gas befinder sig i en tætsluttende beholder. Man ønsker at fordoble gassens volumen og tryk ved at udføre to efterfølgende delprocesser. Delprocesserne kan være isochore, isobare eller isoterme processer.

a) Hvor mange forskellige muligheder er der for sammensætning af de to delprocesser, så det ønskede resultat opnås? Skitsér de mulige processer.

Opgave 6

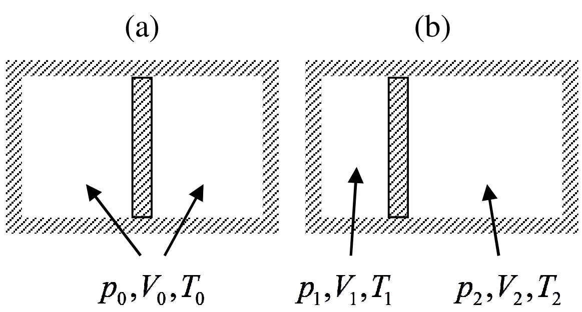
En lodret stående cylindrisk beholder er lukket i bunden og har et stempel i toppen. Stemplet kan bevæge sig gnidningsfrit. Beholder og stempel er så godt varmeisolerede, at man kan se bort fra varmeudveksling med omgivelserne. Man kan endvidere se bort fra beholder og stempels varmekapacitet.
Beholderen indeholder n mol af en énatomig, ideal gas, og over stemplet kan der antages at være vakuum.
Til at starte med har den indespærrende gas et rumfang på V_1, og der er ligevægt mellem trykkraften og tyngdekraften på stemplet. Stemplets masse er m og dets tværsnitsareal er A.
Nu trækkes stemplet ud, indtil gassens rumfang er forøget til det dobbelte af V_1.

b) Bestem hvad trykket p_2 og temperaturen T_2 nu er.

c) Beregn det arbejde, som henholdsvis tyngdekraft, gassen og den ydre kraft udfører under processen $1 \rightarrow 2$.

Opgave 7

En isoleret beholder er delt i to af et tætsluttende, isolerende stempel. I hver af de to dele af beholderen befinder der sig i startsituation (se figur, (a)) en ideal gas med $\gamma = \frac{3}{2}$. De to gasser har i startsituationen begge tryk p_0, volumen V_0 og temperatur T_0.



Der tilføres nu langsomt en varmemængde til den del af beholderen, der er til højre for stemplet. Under varmetilførslen bevæger stemplet sig mod venstre. Når varmetilførslen stopper, er trykket i højre ende af beholderen $p_2 = \frac{64}{27} p_0$ (se figur, (b)).

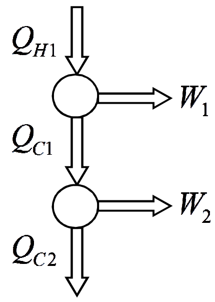
a) Hvilken termodynamisk proces udsættes gassen i venstre del af beholderen for under varmetilførslen? Bestem slutrumfangene V_1 og V_2.

b) Bestem temperaturerne T_1 og T_2.

c) Vis, at arbejdet som stemplet udfører på gassen i venstre halvdel af beholderen er givet ved $W_* = \frac{2}{3} p_0 V_0$.

Opgave 8

En varmemaskine tænkes sammensat af to varmemaskiner, hvor spildvarmen fra den ene maskine tilføres den anden. Virkningsgraderne af de to maskiner er henholdsvis e_1 og e_2. Virkningsgraden af den sammensatte maskine defineres som summen af de to maskiners arbejde divideret med varmen tilført den første maskine.
Maskinen er illustreret i figuren til højre.



a) Vis, at virkningsgraden af den sammensatte maskine er $e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$.

LØSNINGER

Opgave 1 løsning:
Før vi kigger nærmere på nogle af maskinerne undersøger vi om de overholder fysikkens love. De skal for det første adlyde termodynamikkens første hovedsætning. Da maskinerne antages at operere i en kredsproces har vi, at $\Delta U = 0$ og dermed må det kræves at $Q_H + Q_C - W = 0$. For de tre maskiner kan vi indsætte de opgivne talværdier og får: $250-140-110=0$, $250-170-90=-10\neq 0$ og $250-160-90=0$. Vi har derfor ikke lyst til at se nærmere på B's maskine idet vi tror på termodynamikkens første hovedsætning og der for B's maskines vedkommende ikke redegøres for al energien.
Der er også et krav om at maskinerne ikke kan være mere effektive end en Carnotmaskine hvis reservoirer har samme temperaturer. Den maksimale virkningsgrad vi kan tillade er derfor $e_{Carnot}=1-\frac{300}{500}=0.40$. For As maskine finder vi virkningsgraden til at være $e_A=\frac{W}{Q_H}=\frac{110}{250}=0.44$ og for C's maskine $e_B=\frac{W}{Q_H}=\frac{90}{250}=0.36$. A's maskine er ifølge opfinderen mere effektiv end en Carnotmaskine der opererer med samme reservoirtemperaturer og der er derfor ingen grund til at se nærmere på den. C's maskine ser i det mindste ud til at være mulig, så måske den var værd at studere nærmere.

Opgave 2 løsning:
Vi benytter indices 1, 2 og 3 til at referere til de tre tilstande i pV-diagrammet.
Det er en god ide at tegne processen i et pV-diagram.
a) I første ekspansion (isobar) er trykket konstant mens ballonens volumen øges og der må derfor være tilført varme. I den adiabatiske proces udveksles ikke varme. Vi skal benytte formlen for isobarer:$Q = nC_p\Delta T$. For en isobar gælder $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$ der giver$T_2 = 2T_1 = 598$ K . Indsat fås $Q = 3.67$ kJ.
b) Ændringer i den indre energi af en ideal gas afhænger af temperaturændringer og er uafhængig af ændringer i tryk og volumen. Ændringer i indre energi kan beregnes som$\Delta U = nC_V\Delta T$, dvs at vi har $\Delta U = 0$**.**
c) Første hovedsætning lyder $\Delta U = Q -$ og da $\Delta U = 0$ finder vi $Q = W = 3.67$ kJ.
d) For adiabaten gælder $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$; desuden har vi at $T_3 = T_1, T_2 = 2T_1$, og $V_2 = 2V_1$, der indsat giver $V_3 = 2^4V_1 = 113000$ cm^3.

Opgave 3 løsning:
Det er en god ide at tegne processen i et pV-diagram.
a) Den tilførte varmemængde for en isochor proces er$Q_{12} = n\,C_v\Delta T = n\,C_v(T_2 - T_1)$. Vi skal have bestemt sluttemperaturen T_2 og vi husker at for en monoatomar ideal gas er $C_V=\frac{3}{2}R$ og at antallet af mol i gassen for en ideal gas er $n=\frac{p_1V_1}{RT_1}$. For en isochor proces har vi, at $\frac{T_1}{p_1}=\frac{T_2}{p_2}=\frac{T_2}{Ap_1}$ så $T_2=AT_1$. Indsat giver dette $Q_{12} = \frac{p_1V_1}{RT_1}\frac{3}{2}R(AT_1 - T_1)$ der kan reduceres til $Q_{12} = \frac{3}{2}(A-1)p_1V_1$.

b) For en isoterm proces beregnes arbejdet vha. $W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p dV$. Idet den isochore proces giver $V_2 = V_1$ og idealgasligningen giver $p = \frac{nRT}{V}$ får vi $W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} \frac{nRT_2}{V} dV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{nRAT_1}{V} dV$ hvor vi har benyttet at $T_2 = AT_1$. Endelig giver indsættelse af $n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$ at arbejdet kan beregnes som $W_{23} = \int_{V_1}^{V_3} \frac{\frac{p_1 V_1}{RT_1} RAT_1}{V} dV = Ap_1 V_1 \log \frac{V_3}{V_1}$ og for volumenforholdet beregner vi $V_3 = \frac{nRT_3}{p_3} = \frac{nRT_2}{p_1} = \frac{nRAT_1}{p_1} = AV_1$ så slutfacit bliver $W_{23} = Ap_1V_1 \ln(A)$.

c) For den sidste delproces er arbejdet let at beregne idet der er tale om en isobar proces. Vi finder $W_{31} = p_3(V_1 - V_3) = p_1(V_1 - AV_1) = -(A-1)p_1V_1$, der er negativt, dvs. at omgivelserne har udført et arbejde på gassen.

Opgave 4 løsning

a) Gassen er énatomig, så $\gamma = 5/3$.

Isoterm a→b: $p_a V_a = p_b V_b \Rightarrow p_b = p_a \frac{V_a}{V_b} = 0.429$ atm

Adiabat c→a er: $p_a V_a^\gamma = p_c V_c^\gamma \Rightarrow p_c = p_a \left(\frac{V_a}{V_c}\right)^\gamma = 0.244$ atm

b)

Isochor b→c: $\frac{p_b}{T_b} = \frac{p_c}{T_c} \Rightarrow T_c = T_b \frac{p_c}{p_b} = 167$ K

c) Isochor proces er irreversibel men da entropien er en tilstandsfunktion tænker vi os en reversibel isochor proces med samme start- og sluttilstand. $dS = dQ/T = nC_V dT/T = n\tfrac{3}{2}RdT/T$

Entropiændring b→c: $\int_{T_b}^{T_c} n\tfrac{3}{2}R\frac{dT}{T} = n\tfrac{3}{2}R\ln\left(\frac{T_c}{T_b}\right) = -7.01$ J/K

d) Arbejde a→b (isoterm): $W_{ab} = nRT_a \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = 2.06$ kJ

Arbejde b→c (isochor): $W_{bc} = 0$ J

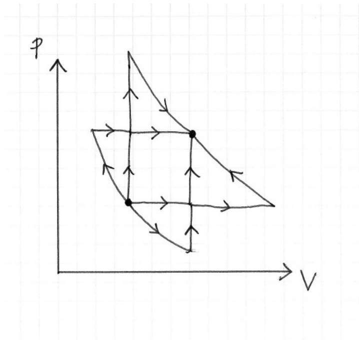
Arbejde c→a (adiabat): $W_{ca} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_c V_c - p_a V_a\right) = -1.57$ kJ

Arbejde totalt: $W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = 490$ J .

Varme tilført: $Q_H = Q_{ab} = W_{ab} = 2.06$ kJ

Virkningsgrad: $e = \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{W_{ab}} = 0.238$

Opgave 5 løsning
Der er i alt 3*2=6 muligheder for at sammensætte processerne. Alle 6 kan give de ønskede ændringer i volumen og tryk.
I figuren er vist alle seks muligheder.



Opgave 6 løsning:
a) Ligevægt for stemplet betyder, at der er balance mellem kraften fra trykket af gassen og vægten af stemplet: $p_1 A = mg \Rightarrow p_1 = \dfrac{mg}{A}$.
Der er tale om en adiabatisk ekspansion til det dobbelte rumfang, så
$\dfrac{mg}{A} V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} = p_2 V_1^{\gamma} 2^{\gamma} \Leftrightarrow p_2 = \dfrac{mg}{A2^{\gamma}}$. Temperaturen findes nu via idealgasligningen:
$p_2 V_2 = nRT_2 \Leftrightarrow T_2 = \dfrac{mg\, 2V_1}{AnR2^{\gamma}}$
b) Da stemplet er i hvile før og efter udtrækningen er $\Delta K = 0$, så det samlede arbejde W på stemplet er ifølge arbejdssætningen 0. Der er tre kræfter der udfører arbejde, når stemplet bliver løftet: Tyngdekraften, som udfører arbejdet $W_t = -mgh$. Trykkraften fra gassen udfører arbejdet $W_{gas} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(\dfrac{mg}{A} V_1 - p_2 V_2\right)$ (adiabatisk ekspansion) på omgivelserne (= stemplet). Indsættelse af tidligere beregnede udtryk for p_2 og V_2 giver $W_{gas} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(\dfrac{mg}{A} V_1 - \dfrac{mg}{A2^{\gamma}} 2V_1\right) = \dfrac{mgV_1}{A(\gamma - 1)}\left(1 - 2^{1-\gamma}\right)$.
Endelig kan den ydre krafts arbejde beregnes fra
$W = 0 \Leftrightarrow W_{træk} = -W_t - W_{gas} \Leftrightarrow W_{træk} = mgh - W_{gas}$

Opgave 7 løsning

a) Da der ikke udveksles varme med omgivelserne er processen 0→1 adiabatisk.

Adiabat(0→1): $p_0 V_0^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$

Ligevægt(1): $p_1 = p_2 = \frac{64}{27} p_0$

$V_1 = V_0 \sqrt[\gamma]{\frac{27}{64}} = \frac{9}{16} V_0$

Rumfang uændret: $V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{23}{16} V_0$

b)

Ideal gas(0→1): $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \frac{64}{27} \frac{9}{16} = \frac{4}{3} T_0$

Ideal gas(0→2): $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_0 \frac{p_2 V_2}{p_0 V_0} = T_0 \frac{64}{27} \frac{23}{16} = \frac{92}{27} T_0$

c) Da venstre halvdel er isoleret ($Q = 0$) bliver arbejdet udført på gassen til indre energi i gassen.

1.H.S.: $\Delta U = Q - W \Rightarrow W = -\Delta U = -nC_V \left(T_1 - T_0\right)$

$$W = -\frac{p_0 V_0}{RT_0} 2R\left(\tfrac{4}{3} T_0 - T_0\right) = -\tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

W er arbejdet udført af gassen i venstre halvdel, vi søger arbejdet på gassen:

$$W_* = -W = \tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

Eller direkte beregnet:

$$W_* = -W = -\frac{1}{\gamma - 1}\left(p_0 V_0 - p_1 V_1\right) = -\frac{1}{\frac{3}{2} - 1} p_0 V \left(1 - \frac{9}{16} \cdot \frac{64}{27}\right) = \tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

Opgave 8 løsning

a)

Maskine 1: $e_1 = \frac{W_1}{Q_{H1}}$

Maskine 2: $e_2 = \frac{W_2}{Q_{H2}} = \frac{W_2}{-Q_{C1}}$

Maskine 1+2: $e = \frac{W_1 + W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \frac{W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \frac{W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \frac{e_2 Q_{H2}}{Q_{H1}} = e_1 - \frac{e_2 Q_{C1}}{Q_{H1}}$

$$e = e_1 - \frac{e_2 Q_{C1}}{Q_{H1}} = e_1 - e_2\left(e_1 - 1\right) = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$