Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve prøve, 20/2, 22/2 og 23/2, 2012

Kursus navn Fysik 1

Kursus nr. 10020/22/24

Varighed: 4 timer

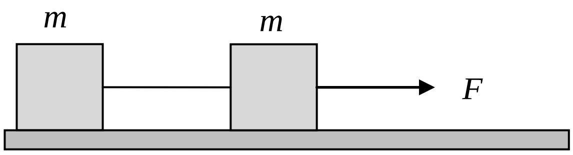
Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler

"Vægtning": Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Alle svar skal begrundes med mindre andet er angivet.
Alle mellemregninger skal medtages.
Der må kun benyttes en simpel lommeregner, dvs. en lommeregner uden computer algebra system.
Prøven indeholder kun opgaver i mekanikdelen af kurserne.

Opgave 1

To identiske kasser befinder sig på en vandret, ru overflade. Hver kasse har massen m. Kasserne er forbundet via en masseløs, vandret snor. Der trækkes med en konstant, vandret kraft, F, i den forreste kasse, så de to kasser bevæger sig med kontant hastighed. Kun F og m er kendte størrelser.



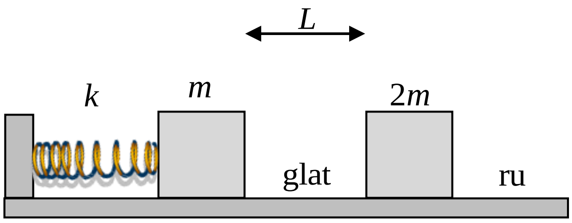
a) Bestem et udtryk for størrelsen af friktionskraften på hver af kasserne.

Lige pludselig øges den vandrette trækkraft fra F til $2F$.

b) Bestem kassernes accelerationer og snorspændingen efter ændringen af trækkraften.

Opgave 2

To kasser befinder sig på en vandret overflade. Kassernes masser er henholdsvis m og $2m$. Den lette kasse er i kontakt med en sammenpresset fjeder. Fjederen har fjederkonstanten k og er presset afstanden L sammen, målt fra sin ligevægtsposition.



Underlaget mellem de to kasser er glat. Til højre for den tunge kasse er overfladen ikke glat og den kinematiske friktionskoefficient mellem kasse og underlag er μ_k.

Den lille slippes fra hvile.

a) Bestem den lette kasses hastighed umiddelbart før den kolliderer med den tunge kasse.

Kollisionen mellem de to kasser er elastisk.

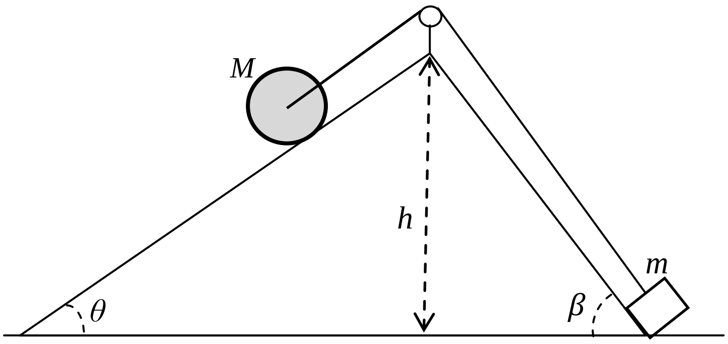
b) Bestem hver kasses hastighed umiddelbart efter kollisionen.

Efter sammenstødet bevæger den tunge kasse sig til højre indtil den står stille, uden at den lette kasse har ramt ind i den igen.

c) Bestem hvor langt den tunge kasse har bevæget sig efter stødet.

Opgave 3

En cylinder med massen M, radius R og inertimoment $I = \frac{1}{2}MR^2$ med hensyn til en rotationsakse gennem massemidtpunktet ligger på et ru skråplan med hældning θ i forhold til vandret.



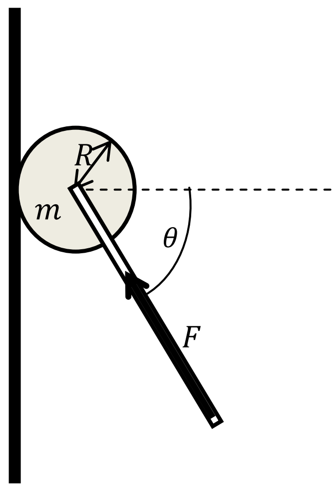
Cylinderen er via en snor over en masseløs trisse forbundet med en klods med massen *m*. Klodsen ligger på det højre skråplan, som er glat og danner vinklen β i forhold til vandret.

Nu slippes cylinderen og den begynder at rulle uden at glide ned ad det venstre skråplan.

a) Opstil et kraftdiagram for henholdsvis cylinderen og klodsen.
b) Bestem accelerationen af cylinderen.
c) Bestem farten af klodsen, når den når toppen af skråplanet.

Opgave 4

En malerrulle skubbes op ad en lodret væg via en stiv, masseløs stang. Der skubbes med en kendt kraft *F*, og der skubbes hele tiden, så kraften har samme vinkel θ med vandret (se figur). Malerrullen, der kan betragtes som en massiv cylinder, ruller uden at glide på væggen, og den har massen *m*, radius *R* og inertimomentet $I = \frac{1}{2}mR^2$ med hensyn til en vandret akse gennem cylinderens massemidtpunkt. Alle de ovenfor nævnte størrelser er kendte.



a) Opstil et kraftdiagram for malerrullen.
b) Bestem accelerationen *a* af malerrullen.

Den statiske gnidningskoefficient mellem væg og rulle benævnes μ_s.

c) Opstil den betingelse som μ_s skal opfylde, for at malerrullen ruller op ad væggen uden at glide.

Fysiske formler

Nedenfor er angivet en række formler, der måske kan være til hjælp. Bemærk, at nogle formler kun gælder under specielle forhold, der ikke nødvendigvis er angivet. Samme symboler kan optræde flere steder med forskellige betydninger. Formelsamlingen kan indeholde emner der ikke er relevant for denne eksamen.

Kinematik

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x\left(x - x_0\right)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t$$

$$x = v_0 \cos\left(\alpha\right)t$$

$$y = v_0 \sin\left(\alpha\right)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{\tan} = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{r}_{A|B} = \vec{r}_{A|C} + \vec{r}_{C|B}$$

Partikelmekanik

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{A|B} = -\vec{F}_{B|A}$$

$$f_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} n$$

$$f_{\text{s}} \le \mu_{\text{s}} n$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{\text{andre}} = K_2 + U_2$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}$$

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -\left(v_{B1x} - v_{A1x}\right)$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}$$

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ydre}} = M\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Stive legemers mekanik

$$v = r\omega$$

$$a = r\alpha$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$K = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Gravitation

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$U = -\frac{Gm_{\text{E}}m}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_{\text{E}}}}$$

Svingninger

$$a = -\omega^2 x$$

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$x = A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)$$

Fluider

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$B = \rho V g$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{dV}{dt} = Av$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Termodynamik

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = nC\Delta T$$

$$Q = \pm mL$$

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L}$$

$$pV = nRT$$

$$m_{\text{total}} = nM$$

$$M = N_{\text{A}} m$$

$$K_{\text{tr}} = \tfrac{3}{2} nRT$$

$$\tfrac{1}{2} m\left(v^2\right)_{av} = \tfrac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\left(v^2\right)_{av}}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$W = \int p dV$$

$$\Delta U = Q - W$$

$$C_p = C_V + R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

$$W_{\text{adiabat}} = nC_V\left(T_1 - T_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{C_V}{R}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}$$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$e = \frac{W}{Q_H}$$

$$K = \frac{Q_C}{-W}$$

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

Elektromagnetisme

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \oint_{\text{lukket overflade}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \ldots$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \varepsilon_0\frac{A}{d}$$

$$C = KC_0 = K\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \oint_{\text{lukket overflade}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r}$$

$$\oint_{\text{lukket kurve}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

Matematiske formler

$$\frac{d\left(f(x)+g(x)\right)}{dx}=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)-g(x)\right)}{dx}=f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{df(g(x))}{dx}=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|$$

$$\int \exp(ax)dx=\frac{1}{a}\exp(ax)$$

$$\cos\theta=\frac{a}{c}$$

$$\sin\theta=\frac{b}{c}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{b}{a}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0\Rightarrow u(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

$$x^n x^m=x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

$$x^n y^n=(xy)^n$$

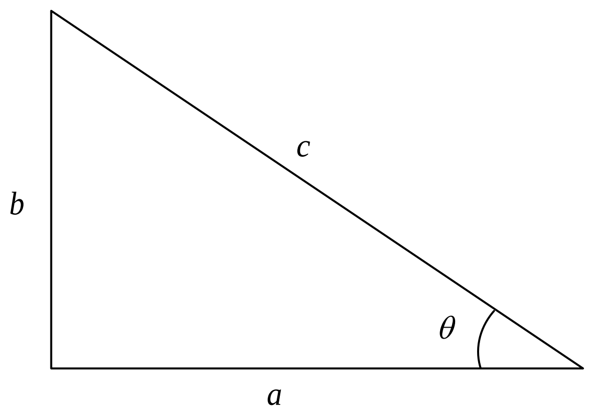
$$\frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$\left(x^n\right)^m=x^{nm}$$

$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right)=n\ln(x)$$

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



Løsning 1

a)

N2(venstre): $\sum F_x = T - f = 0$

N2(højre): $\sum F_x = F - T - f = 0$

Læg de to ligninger sammen:

$$F - 2f = 0$$

$$\boxed{f = \frac{F}{2}}$$

b)

N2(venstre): $ma = \sum F_x = T - f$

N2(højre): $ma = \sum F_x = 2F - T - f$

Friktion: $f = \frac{F}{2}$

$$2ma = 2F - 2f$$

$$2ma = 2F - F$$

$$\boxed{a = \frac{F}{2m}}$$

$$m\frac{F}{2m} = T - \frac{F}{2}$$

$$\boxed{T = F}$$

Løsning 2

Vi definerer følgende tilstande. 1 er startsituationen; 2 er lige før sammenstødet; 3 er lige efter sammenstødet; 4 er lige efter den tunge kasse står stille.

a) Energibevarelse(1->2): $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\frac{1}{2}kL^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_{m,2}^2$$

$$\boxed{v_{m,2} = \sqrt{\frac{k}{m}}L}$$

b) Impulsbevarelse(2->3): $mv_{m,2} = mv_{m,3} + 2mv_{2m,3}$

Energibevarelse(2->3): $v_{m,2} - 0 = -\left(v_{m,3} - v_{2m,3}\right)$

Impulsbevarelse(2->3): $v_{m,2} = v_{m,3} + 2v_{2m,3}$

Læg de to ligninger sammen:

$$\boxed{v_{2m,3} = \frac{2}{3}v_{m,2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}L}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}L = v_{m,3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}L$$

$$\boxed{v_{m,3} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}L}$$

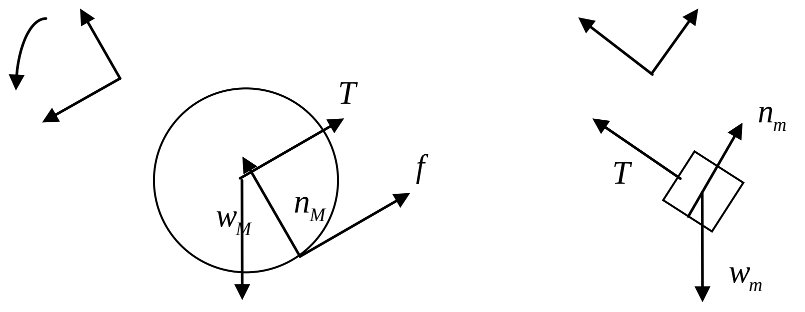
c) Arbejdssætningen(3->4): $\Delta K = K_4 - K_3 = W_{\text{friktion}}$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}2m\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}L\right)^2 = -\mu_{\mathrm{k}} 2mgx$$

$$\boxed{x = \frac{2}{9}\frac{kL^2}{\mu_{\mathrm{k}} mg}}$$

Løsning 3

a)



b)

N2(m,x): $ma = T - mg\sin\beta$

N2(M,x): $Ma = Mg\sin\theta - T - f$

IMS(cm): $\frac{1}{2}MR^2\alpha = fR$

Kin.: $a = R\alpha$

IMS(cm): $\frac{1}{2}Ma = f$

$$ma + Ma + \frac{1}{2}Ma = T - mg\sin\beta + Mg\sin\theta - T - f + f$$

$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)a = \left(M\sin\theta - m\sin\beta\right)g$$

$$a = \frac{M\sin\theta - m\sin\beta}{\frac{3}{2}M + m}g$$

c) Vi lægger nulpunkt for potentiel energi i startsituationen.

Energibevarelse:

$$U_1 + K_{1,M,trans} + K_{1,M,rot} + K_{1,m,trans} = U_2 + K_{2,M,trans} + K_{2,M,rot} + K_{2,m,trans}$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = -Mg\frac{h}{\sin\beta}\sin\theta + mgh + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$v = R\omega$

$$gh\left(M\frac{\sin\theta}{\sin\beta}-m\right)=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv^2$$

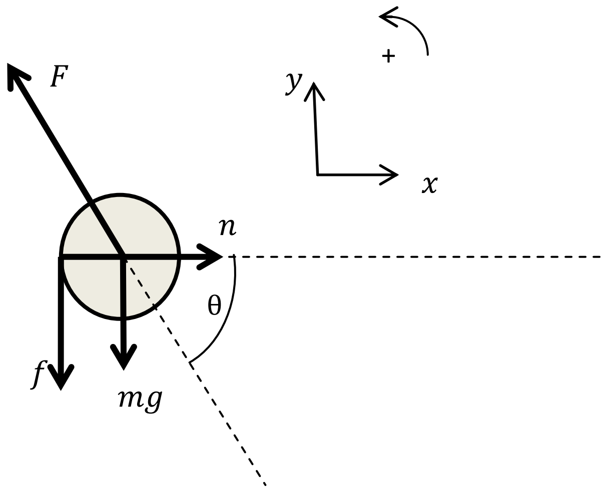
$$gh\left(M\frac{\sin\theta}{\sin\beta}-m\right)=\left(\frac{1}{2}M+\frac{1}{4}M+\frac{1}{2}m\right)v^2$$

$$gh\left(M\frac{\sin\theta}{\sin\beta}-m\right)=\left(\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}m\right)v^2$$

$$\boxed{v=\sqrt{gh\left(\frac{M\dfrac{\sin\theta}{\sin\beta}-m}{\dfrac{3}{4}M+\dfrac{1}{2}m}\right)}}$$

Løsning 4

a) Se kraftdiagrammet til højre. Der er fire kræfter der virker. Den kendte kraft F, vægten mg, normalkraften n og friktionen f.



b)

Kendte: m, R, g, F, θ

Ukendte: n, f, a, α

MMS(x): $n - F\cos\theta = 0$

MMS(y): $ma = F\sin\theta - f - mg$

IMS(cm): $I\alpha = \tfrac{1}{2}mR^2\alpha = fR$

GB: $a = R\alpha$

Indsæt GB i IMS(cm) og forkort radius ud. Læg denne ligning sammen med MMS(y).

$$\tfrac{3}{2}ma = F\sin\theta - mg$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}\left(\frac{F\sin\theta}{m} - g\right)}$$

c) Den statiske friktion adlyder uligheden $f \le \mu_s n$, hvilket giver kravet for den statiske friktionskoefficient til at være $\mu_s \ge \dfrac{f}{n}$. Vi skal altså bestemme f og n udtrykt ved de kendte størrelser. Normalkraften fås direkte fra MMS(x) og friktionen fra IMS(cm) ved indsættelse af udtrykket for accelerationen.

$$n = F\cos\theta$$

$$f = F\sin\theta - mg - ma = F\sin\theta - mg - \frac{2}{3}F\sin\theta - \frac{2}{3}mg = \frac{1}{3}\left(F\sin\theta - mg\right)$$

$$\mu_s \ge \frac{f}{n} = \frac{\frac{1}{3}\left(F\sin\theta - mg\right)}{F\cos\theta} = \frac{1}{3}\left(\tan\theta - \frac{mg}{F\cos\theta}\right)$$

$$\boxed{\mu_s \ge \frac{1}{3}\left(\tan\theta - \frac{mg}{F\cos\theta}\right)}$$