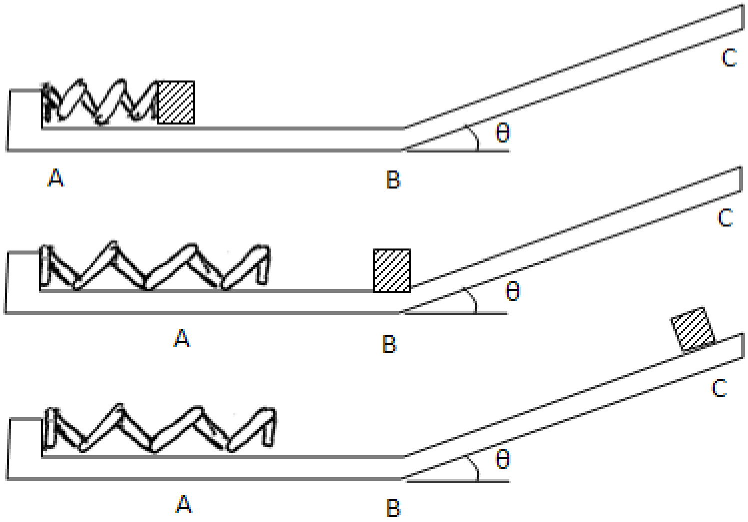
# Eksamentræning i mekanik, 10020/22/24, 2011

## Opgave 1

En klods sendes af sted fra en spændt fjeder. Først kurer klodsen langs et vandret underlag der er glat. Ved B drejer underlaget opad, og på det skrå stykke er der friktion.
Klodsen, som kan betragtes som en partikel, har farten 15 m/s ved punkt B, og der sker ikke noget energitab i forbindelse med retningsskiftet i punkt B.

Følgende data er givet:
Masse af klods 5.00 kg.
Fjederkonstant: 3000 N/m.
Kinetisk friktionskoefficient på det skrå stykke: 0.300.
Vinklen på det skrå stykke: 40°



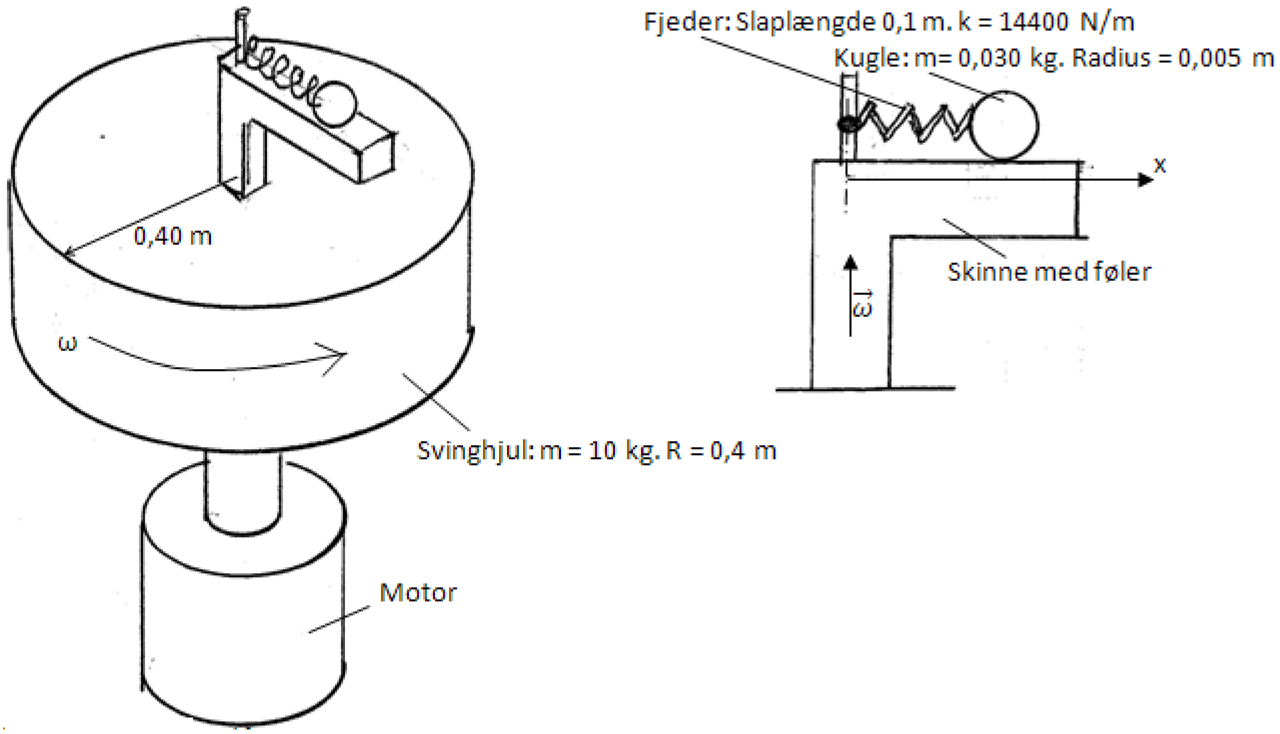

a) Hvor meget er fjederen presset sammen inden den skyder klodsen af sted?

b) Hvor langt kommer klodsen op ad skråplanet (punkt C)?

c) Hvad må der kræves af den statiske friktionskoefficient på det skrå stykke for at klodsen ikke skrider ned af det skrå stykke igen. Hvis dette krav ikke kan opfyldes, hvor stor bliver accelerationen for klodsen, når den skrider nedad igen?

**Opgave 2**

En motor driver et svinghjul rundt som vist på tegningen nedenfor til venstre.
For at kunne måle hvor hurtigt svinghjulet drejer rundt, er der ovenpå svinghjulet anbragt et måleapparat. Tegningen herunder viser måleapparatet mere præcist.




Måleapparatet består af en kugle, der kan forskydes langs en skinne. Kuglen holdes fast af en fjeder, der i den anden ende sidder fast på en stang, der er anbragt lige i omdrejningsaksen for svinghjulet. Jo hurtigere hjulet drejer rundt, jo længere ud slynges kuglen, og jo længere skal fjederen strækkes for at holde kraftbalance med kuglen.

Følgende data er givet:

| | |
|---|---|
| Kuglens masse: | 0.030 kg. |
| Fjederens slappe længde: | 0.010 m |
| Fjederens stivhedskonstant: | 14400 N/m |

a) Hvad er fjederens forlængelse, når svinghjulets vinkelhastighed er 400 rad/s?

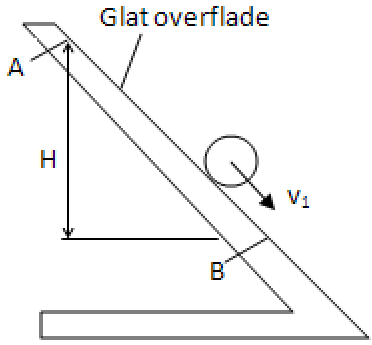
Af sikkerhedsmæssige årsager kræves det, at motoren er i stand til at bremse svinghjulet ned fra en vinkelhastighed på 400 rad/s til 0 rad/s i løbet af 5.0 sekunder.

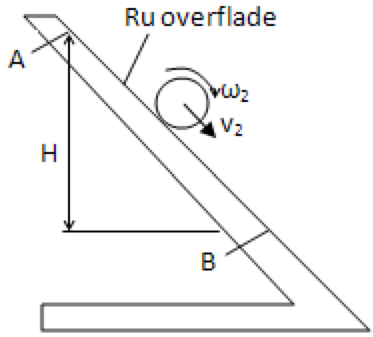
Følgende data er givet for svinghjulet:
Svinghjulets masse: 10 kg.
Svinghjulets radius: 0.40 m

b) Hvilket kraftmoment skal motoren kunne levere for at opfylde kravet til at kunne bremse svinghjulet ned på den krævede tid?

## Opgave 3

To identiske kugler bevæger sig ned ad to identiske skråplaner, dog med den forskel, at der på skråplanet til venstre ikke er nogen friktion. I skråplanet til højre er der tilstrækkelig med friktion til at kuglen ruller.




Kuglerne anbringes i punkt A, holdes fast og slippes så.

a) Vis at når kuglernes lodrette højde er formindsket med $H$, er forholdet mellem deres lineære hastigheder $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{5}{7}}$.

## Opgave 4

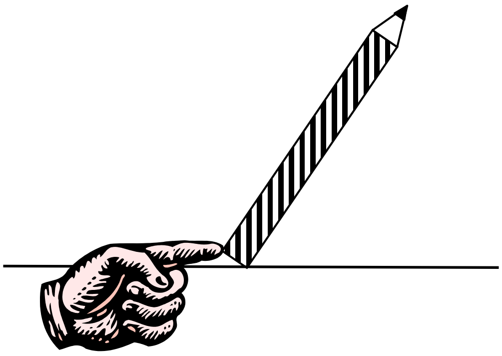
En kugle med masse $m = 7.0 \text{ kg}$ ligger i hvile på jorden. En kuglestøder samler kuglen op og støder den. Kuglen lander i den vandrette afstand $L = 20 \text{ m}$ fra det punkt hvor kuglen slippes. Punktet hvor kuglen slippes ligger i højden $h = 2.2 \text{ m}$ over jorden. Når kuglen slippes danner dens hastighed en vinkel på $\theta = 43^o$ med vandret.

a) Bestem farten af kuglen i det øjeblik den slippes.

b) Hvor stort et arbejde har kuglestøderen udført på kuglen?

**Opgave 5**

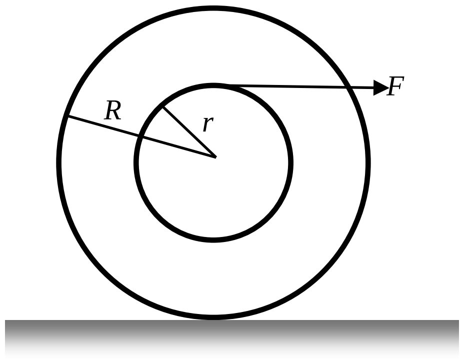
Ved at skubbe med konstant kraft til en hældende blyant, kan man få blyanten til at accelerere retlinet langs bordet, uden at blyanten vælter.
Blyanten kan opfattes som en tynd, homogen stang med massen $M$ og længden $L$. Der skubbes med en konstant, vandret kraft $F$ nederst på blyanten. Bordet kan antages at være glat.



a) Tegn et kraftdiagram for blyanten. Bestem normalkraften på blyanten, accelerationen af blyanten samt blyantens vinkel med vandret.

**Opgave 6**

Et hjul består af to ringe med radierne $r$ og $R$ (de to ringe er fastgjort til hinanden med tynde metalrør, men da disse ikke har nogen betydning for inertimomentet eller massen af hjulet, er de ikke vist i figuren). Hver ring har massen $M$. Hjulet drives fremad ved at toppunktet af den indre ring påvirkes af en vandret kraft $F$, hvorefter hjulet ruller på jorden.



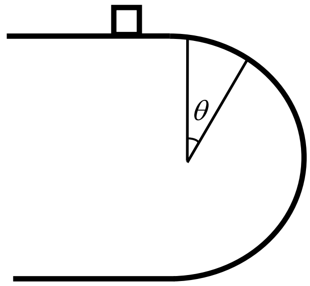

a) Tegn et kraftdiagram for hjulet.

b) Bestem hjulets vinkelacceleration.

c) Hvad skal der gælde om den statiske friktionskoefficient $\mu_s$ for at den beskrevne bevægelse er mulig?

## Opgave 7

Et transportbånd transporterer kasser med konstant fart $v_0$. Efter et vandret stykke kommer kasserne ud på et halvcirkelformet stykke. Den statiske friktionskoefficient mellem kasser og transportbånd er $\mu_s$. Kassernes masse er $m$.

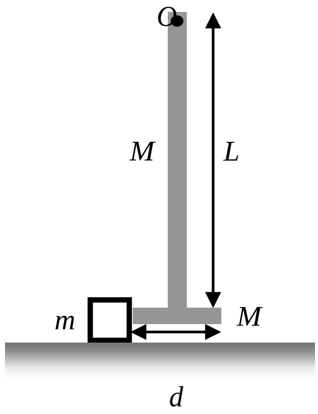



a) Tegn et kraftdiagram (free-body diagram) for kassen, når den befinder sig på cirkelbuen og stadig bevæger sig med farten $v_0$. Bestem udtryk for normalkraften og friktionskraften som funktion af vinklen $\theta$ (se figuren) og farten $v_0$, i den nævnte situation.

b) Vis, at den vinkel, $\theta$ ved hvilken kasserne begynder at glide i forhold til transportbåndet tilfredsstiller ligningen $\cos\theta - \frac{1}{\mu_s}\sin\theta = \frac{v^2}{gR}$, hvor $R$ betegner radius af halvcirklen og $g$ størrelsen af tyngdeaccelerationen.

## Opgave 8

Til afprøvning af emners følsomhed overfor sammenstød benyttes opstillingen skitseret i figuren til højre. Det emne, der skal undersøges bliver placeret på et bord (i figuren en kasse med masse $m$). Kassen udsættes for et stød med en hammer (det grå objekt i figuren). Hammeren består af en lang, tynd stang med længde $L$ og masse $M$, der er sat sammen med et tyndt hammerhoved, der har bredde $d$ og ligeledes masse $M$. Hammeren er ophængt i punktet $O$ og kan rotere friktionsfrit omkring en vandret akse, der er vinkelret på papirets plan. For at teste emnet hæves hammeren så den tynde stang ligger vandret, og den slippes herefter fra hvile.




a) Vis, at inertimomentet af hammeren med hensyn til rotationsaksen er $I = M\left(\frac{4}{3}L^2 + \frac{1}{12}d^2\right)$.

Inertimomentet af hammeren, $I$, kan herefter antages at være en kendt størrelse, der i det følgende skal benyttes ved angivelse af svar.
Hammeren slippes fra en situation hvor stangen holdes vandret, og rammer herefter kassen i et elastisk stød.

b) Bestem hammerens vinkelhastighed $\omega_2$, umiddelbart før den rammer kassen.

c) Opstil en eller flere ligninger, hvoraf hammerens vinkelhastighed $\omega_3$, umiddelbart efter den har ramt kassen, kan bestemmes, udtrykt ved kendte størrelser. Der skal ikke udledes en formel for $\omega_3$.

**Opgave 1 løsning**

a)
Der er ingen friktion på det vandrette stykke, så vi kan benytte energibevarelse.
Energibevarelse: $U_A + K_A = U_B + K_B$

$$\tfrac{1}{2}k\Delta x^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_B = 0.612 \text{ m}$$

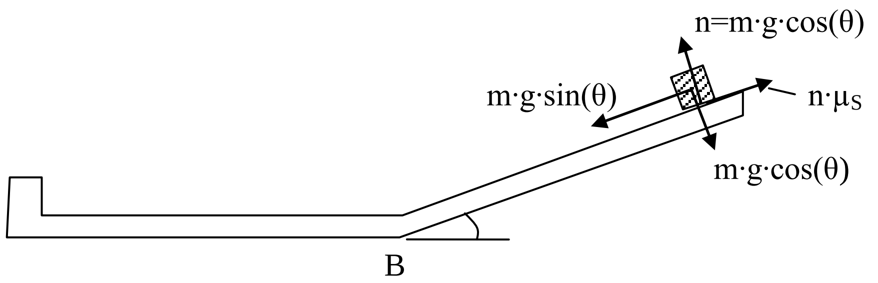
b)
Vi kan benytte en energibetragtning på stykket fra B til C. Lad $l$ være strækningen klodsen bevæger sig opad skråplanet. X-akse opad skråplanet, y-akse vinkelret herpå.

N1(y): $\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$

Energibetragtning: $U_B + K_B + W_{\text{friktion}} = U_C + K_C$

$$0 + \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \mu_k nl = mgl\sin\theta + 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 - \mu_k mg\cos\theta l = mgl\sin\theta \Rightarrow l = \frac{\tfrac{1}{2}mv_B^2}{mg\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)} = \frac{v_B^2}{2g\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)} = 13.1 \text{ m}$$




c)
Et kraftdiagram for situationen er vist i figuren herover, den statiske friktion er maksimal.

N1(x): $\sum F_x = \mu_s n - mg\sin\theta = 0$

N1(y): $\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$

$$\mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \mu_s = \tan\theta = 0.839$$

I kraftdiagrammet ovenfor kan $\mu_s$ erstattes med $\mu_k$ hvis klodsen glider nedad igen.

N2(x): $ma_x = \mu_k n - mg\sin\theta$

N1(y): $\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$

$$a_x = g\left(\mu_k\cos\theta - \sin\theta\right) = -4.06 \text{ m/s}^2$$

**Opgave 2 løsning**

a) Radial akse med nulpunkt i centrum for cirkelbevægelsen.

N2(rad): $ma_{\text{rad}} = -k\Delta x$

Kinematik: $a_{\text{rad}} = -\dfrac{v^2}{R} = -\omega^2 R = -\omega^2\left(x_0 + \Delta x + r_{\text{kugle}}\right)$

$$-k\Delta x = -m\omega^2\left(x_0 + \Delta x + r_{\text{kugle}}\right) \Rightarrow \Delta x = \frac{m\omega^2\left(x_0 + r_{\text{kugle}}\right)}{k - m\omega^2}$$

$$\Delta x = \frac{m\omega^2\left(x_0 + r_{\text{kugle}}\right)}{k - m\omega^2} = 0.0525 \text{ m} \qquad \text{med } x_0 = 0.10 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{m\omega^2\left(x_0 + r_{\text{kugle}}\right)}{k - m\omega^2} = 0.0075 \text{ m} \qquad \text{med } x_0 = 0.01 \text{ m}$$

b)

Kinematik: $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{-\omega_0}{t} = -80 \text{ rad/s}^2$

IMS(CM): $I\alpha = \tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{2} MR^2\alpha = -64 \text{ Nm}$

**Opgave 3 løsning**

a) Da der kun er konservative kræfter involveret benytter vi energibevarelse. Den potentielle energi sættes til nul i kuglernes slutposition.

Ren translation:

Energibevarelse: $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$mgH + 0 = 0 + \tfrac{1}{2} mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH}$$

Translation og rotation.

Energibevarelse: $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$mgH + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5} mr^2\omega_2^2 + \tfrac{1}{2} mv_2^2$$

Kinematik: $v_2 = r\omega_2$

$$mgH + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5} mv_2^2 + \tfrac{1}{2} mv_2^2 = \tfrac{7}{10} mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\tfrac{7}{10}\, gH}$$

Forholdet mellem sluthastighederne er:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\tfrac{10}{7}\, gH}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\tfrac{5}{7}}$$

**Opgave 4 løsning**

a) For en kasteparabel har vi for et skråt kast der starter i origo, at

Kasteparabel: $y = \tan\theta \cdot x - \dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2$

Vi indsætter de kendte værdier for nedslagspunktet, hvis koordinater er $(L, -h)$

Kasteparabel: $-h = \tan\theta \cdot L - \dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}L^2$

Find farten: $v = \left(\dfrac{gL^2}{2\cos^2\theta\left(\tan\theta \cdot L + h\right)}\right)^{1/2} = 13.3\text{ m/s}$

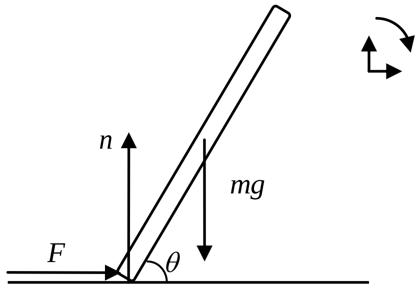
b) Vi benytter arbejdssætningen; kun kuglestøderen og tyngdekraften udfører arbejde.

Arbejdssætn.: $\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\text{kuglestøder}} + W_{\text{tyngdekraft}}$

$W_{\text{kuglestøder}} = \tfrac{1}{2}mv^2 - W_{\text{tyngdekraft}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = 770\text{ J}$

**Opgave 5 løsning**

a) Kraftdiagrammet er vist her til højre.
Vi opskriver N2 i vandret for blyanten, N2 lodret og impulsmomentsætningen mht. massemidtpunktet.




Kendte: $m, L, F$

Ukendte: $a, n, \theta$

N2(→): $ma = F$

N1(↑): $\sum F_y = n - mg = 0$

IMS(CM): $\sum \tau = n\dfrac{L}{2}\cos\theta - F\dfrac{L}{2}\sin\theta = 0$

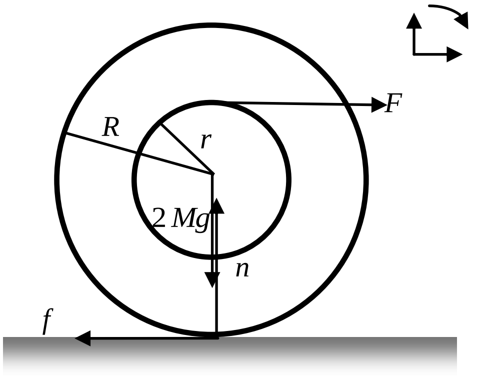
$n = mg$

$a = \dfrac{F}{m}$

$\tan\theta = \dfrac{mg}{F}$

## Opgave 6 løsning

a) Kraftdiagrammet er vist til højre.




b)

Ukendte: $a_x, \alpha, f, n$

Vi opskriver N2 i vandret og lodret retning, impulsmomentsætningen mht. massemidtpunktet samt den kinematiske sammenhæng mellem translation og rotation.

N2(→): $2Ma_x = F - f$

N2(↑): $2Ma_y = n - 2Mg = 0$

IMS(CM): $M\left(r^2 + R^2\right)\alpha = Fr + fR$

Kinematik: $a_x = R\alpha$

$$\alpha = \frac{F}{M}\frac{r+R}{r^2+3R^2}$$

c)

Vi må kræve at uligheden $f \le \mu_s n$ er opfyldt. Vi bestemmer de indgående størrelser.

$$f = F - 2Ma_x = F - 2MR\alpha = F - \frac{2MRF(r+R)}{M\left(r^2+3R^2\right)} = \frac{F\left(r^2+3R^2-2rR-2R^2\right)}{r^2+3R^2} = \frac{F\left(R-r\right)^2}{r^2+3R^2}$$

Det ses, at friktionskraften er positiv, dvs. $f$ peger i den tegnede retning.

N2(↑) giver $n = 2Mg$.

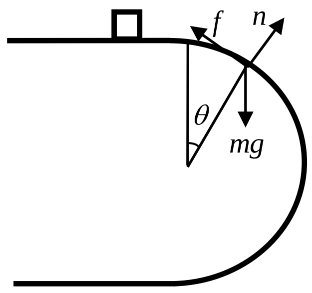
Uligheden for statisk friktion er $f \le \mu_s n$.

Indsættelse af udtrykkene for den statiske friktion og normalkraften giver:

$$\mu_s \ge \frac{F}{2Mg}\frac{\left(R-r\right)^2}{r^2+3R^2}.$$

**Opgave 7 løsning**

a)
Vi opskriver N2 for radial og tangentiel bevægelse, og husker at farten er konstant, hvorfor $a_{\text{tan}} = 0$.




N2(rad): $ma_{\text{rad}} = m\dfrac{v^2}{R} = mg\cos\theta - n$

N2(tan): $ma_{\text{tan}} = mg\sin\theta - f = 0$

$$n = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$f = mg\sin\theta$$

b)
Friktion: $f \le \mu_s n$

Indsæt udtrykkene for normalkraften og friktionskraft i uligheden for den statiske friktion, og benyt lighedstegn for maksimal friktion:

N2(rad): $mg\sin\theta = \mu_s\left(mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R}\right)$

divider med $m$ og omskriv: $\dfrac{v^2}{gR} = \cos\theta - \dfrac{1}{\mu_s}\sin\theta$

**Opgave 8 løsning**

a) Inertimomentet beregnes ved hjælp af parallelakseteoremet:

$$I = I_{\text{stang}} + I_{\text{hammerhoved}} = \left(\tfrac{1}{3}ML^2\right)_{\text{stang}} + \left(\tfrac{1}{12}Md^2 + ML^2\right)_{\text{hammerhoved}} = M\left(\tfrac{4}{3}L^2 + \tfrac{1}{12}d^2\right)$$

1: betegner situationen hvor stangen holdes vandret
2: betegner lige før sammenstødet
3: betegner lige efter sammenstødet

b) 1→2 systemet er hammer; vi benytter energibevarelse; $U = 0$ på bordet.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$2MgL + 0 = Mg\frac{L}{2} + \tfrac{1}{2}I\omega_2^2$$

$$\omega_2 = \sqrt{3MgL/I}$$

c) 2→3 systemet er hammer og kasse; vi benytter energibevarelse samt impulsmomentbevarelse

$$U_2 + K_2 = U_3 + K_3 \qquad 0 + \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_3^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_3^2$$

$$L_2 = L_3 \qquad 0 + I\omega_2 = mv_3L + I\omega_3$$