Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, onsdag den 25. maj, 2011

Kursus navn Fysik 1

Kursus nr. 10022

Varighed: 4 timer

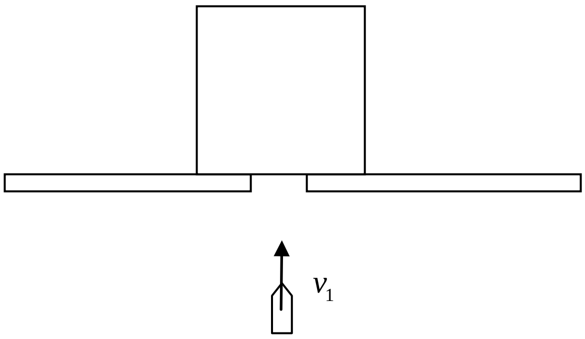
Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler

"Vægtning": Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Alle svar skal begrundes med mindre andet er angivet.
Alle mellemregninger skal medtages.
Der må kun benyttes en simpel lommeregner, dvs. en lommeregner uden computer algebra system.

Opgave 1

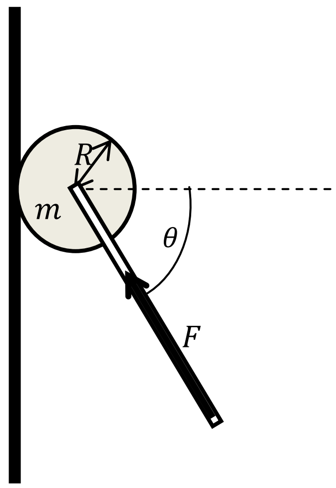
En kasse med masse M befinder sig på et vandret bord. Der er et hul i bordet, gennem hvilket der skydes et projektil ind i kassen. Projektilet bremses helt op i forhold til kassen, og sidder derefter fast i kassen. Projektilet har massen m og farten v_1. Det kan antages, at indtrængningen i kassen sker hurtigt.



a) Bestem kassens fart umiddelbart efter indtrængningen.
b) Hvor højt over bordet når kasse og projektil.

Opgave 2

En malerrulle skubbes op ad en lodret væg via en stiv, masseløs stang. Der skubbes med en kendt kraft F, og der skubbes hele tiden, så kraften har samme vinkel θ med vandret (se figur). Malerrullen, der kan betragtes som en massiv cylinder, ruller uden at glide på væggen, og den har massen m, radius R og inertimomentet $I = \frac{1}{2}mR^2$ med hensyn til en vandret akse gennem cylinderens massemidtpunkt. Alle de ovenfor nævnte størrelser er kendte.



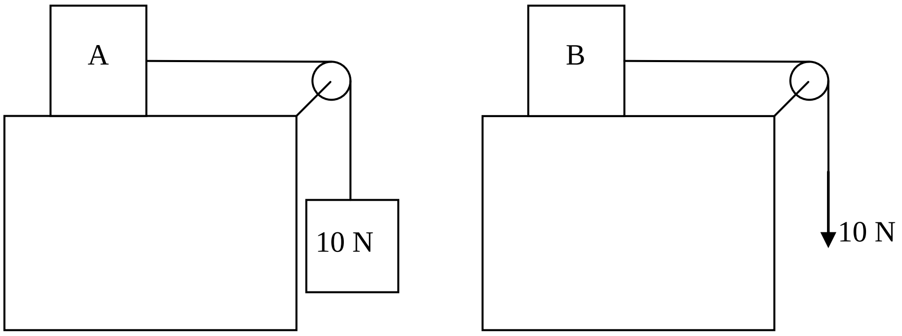
a) Opstil et kraftdiagram for malerrullen.
b) Bestem accelerationen a af malerrullen.

Den statiske gnidningskoefficient mellem væg og rulle benævnes μ_s.

c) Opstil den betingelse som μ_s skal opfylde, for at malerrullen ruller op ad væggen uden at glide.

Opgave 3

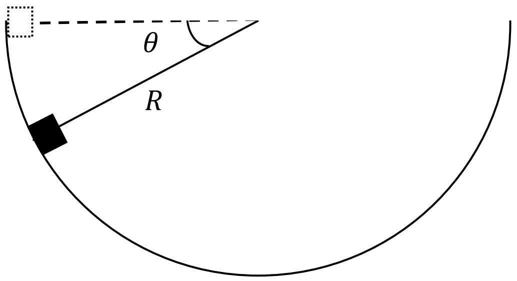
Vi betragter to forskellige fysiske situationer, som vist i figuren. I den venstre situation befinder en kasse, A, sig på et glat, vandret bord. Kassen har massen m og er med en snor forbundet med en anden kasse med vægt 10 N. Snoren løber over en masseløs, friktionsfri trisse. Når systemet slippes fra hvile, vil kassen, A, accelerere mod højre.
I den anden situation er en kasse, B, der er identisk med A, placeret på et glat, vandret bord. Til B er fastgjort en snor, i hvis anden ende der trækkes med en kraft på 10 N. Trissen er identisk med den i venstre situation. Kassen B starter fra hvile og accelererer mod højre, når der trækkes med den konstante kraft på 10 N.



a) Har kasserne samme acceleration, har A størst acceleration eller har B størst acceleration? Svaret skal begrundes.

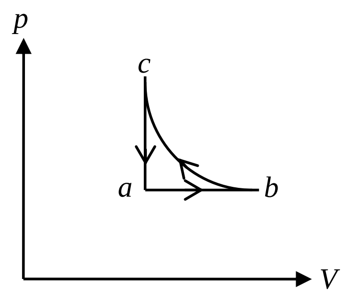
Opgave 4

En lille partikel med masse m fastholdes i hvile i toppen af en glat, lodret halvcirkel med radius R (startsituationen er vist som en hvid kasse i figuren). Partiklen slippes og den begynder, at glide ned ad halvcirklen.



a) Bestem partiklens acceleration umiddelbart efter at den er sluppet.
b) Bestem farten af partiklen når den er nået til den viste situation (den sorte kasse i figuren).
c) Vis, at normalkraften på partiklen i den viste situation (den sorte kasse i figuren) er givet ved $n = 3mg\sin\theta$.

Opgave 5



En ideal gas med en kendt værdi for γ indeholder n mol og har i begyndelsestilstanden a rumfanget V_a og temperaturen T_a. Ved en kredsproces bringes gassen til at virke som en kølemaskine (se figur). Først udvides gassen ved konstant tryk indtil rumfanget er $2V_a$. Her efter komprimeres gassen adiabatisk indtil rumfanget igen er V_a. Endelig afkøles gassen ved en isochor proces indtil temperaturen atter er T_a.

Gaskonstanten er R, og øvrige kendte størrelser er $T_a,\ V_a,\ n,\ R,\ C_p,\ C_V$ og γ.

a) Bestem p_a, T_b og T_c samt Q_{ab} og Q_{ca}.
b) Bestem kølemaskinens effektfaktor K (”coefficient of performance”).
c) Vis ved eksplicit beregning, at den samlede entropiændring af gassen ved kredsprocessen er nul.

Fysiske formler

Nedenfor er angivet en række formler, der måske kan være til hjælp. Bemærk, at nogle formler kun gælder under specielle forhold, der ikke nødvendigvis er angivet. Samme symboler kan optræde flere steder med forskellige betydninger. Formelsamlingen kan indeholde emner der ikke er relevant for denne eksamen.

Kinematik

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x (x - x_0)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t$$

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{\tan} = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{r}_{A|B} = \vec{r}_{A|C} + \vec{r}_{C|B}$$

Partikelmekanik

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{A|B} = -\vec{F}_{B|A}$$

$$f_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} n$$

$$f_{\text{s}} \le \mu_{\text{s}} n$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{\text{andre}} = K_2 + U_2$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x})$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}$$

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ydre}} = M\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Stive legemers mekanik

$$v = r\omega$$

$$a = r\alpha$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Gravitation

$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$U = -\frac{G m_{\text{E}} m}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G m_{\text{E}}}}$$

Svingninger

$$a = -\omega^2 x$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Fluider

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$B = \rho V g$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{dV}{dt} = Av$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Termodynamik

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = nC\Delta T$$

$$Q = \pm mL$$

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L}$$

$$pV = nRT$$

$$m_{\text{total}} = nM$$

$$M = N_{\text{A}} m$$

$$K_{\text{tr}} = \tfrac{3}{2} nRT$$

$$\tfrac{1}{2} m\left(v^2\right)_{av} = \tfrac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\left(v^2\right)_{av}}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$W = \int pdV$$

$$\Delta U = Q - W$$

$$C_p = C_V + R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

$$W_{\text{adiabat}} = nC_V\left(T_1 - T_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{C_V}{R}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}$$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$e = \frac{W}{Q_H}$$

$$K = \frac{Q_C}{-W}$$

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

Elektromagnetisme

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{lukket}\\ \text{overflade}}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \ldots$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \varepsilon_0\frac{A}{d}$$

$$C = KC_0 = K\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_{\substack{\text{lukket}\\ \text{overflade}}} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r}$$

$$\int_{\substack{\text{lukket}\\ \text{kurve}}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

Matematiske formler

$$\frac{d\left(f(x)+g(x)\right)}{dx}=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)-g(x)\right)}{dx}=f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{df(g(x))}{dx}=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|$$

$$\int \exp(ax)dx=\frac{1}{a}\exp(ax)$$

$$\cos\theta=\frac{a}{c}$$

$$\sin\theta=\frac{b}{c}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{b}{a}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0\Rightarrow u(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

$$x^n x^m=x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

$$x^n y^n=(xy)^n$$

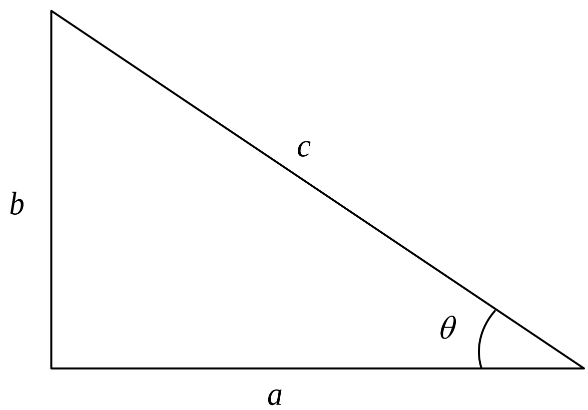
$$\frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$\left(x^n\right)^m=x^{nm}$$

$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right)=n\ln(x)$$

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



Løsning 1

a) Vi benytter impulsbevarelse for systemet bestående af kasse og projektil. 1 er lige før kollision, 2 er lige efter kollision.

Impulsbevarelse $mv_1 + M \cdot 0 = (m+M)v_2$

$$\boxed{v_2 = \frac{m}{m+M} v_1}$$

b) Vi benytter energibevarelse. 3 betegner det øverste punkt i systemets bane. Nulpunkt for den potentielle energi er i situation 2. y-akse vælges opad.

Energibetragtning: $U_2 + K_2 = U_3 + K_3$

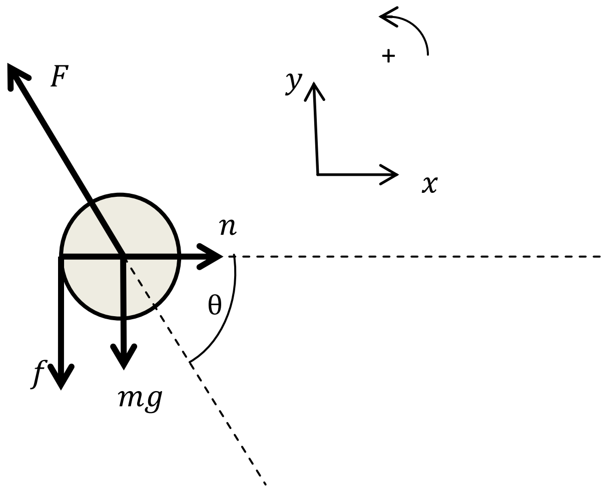
$$0 + \frac{1}{2}(m+M)v_2^2 = (m+M)gh + 0$$

$$0 + \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M} v_1\right)^2 = (m+M)gh + 0$$

$$\boxed{h = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}}$$

Løsning 2

a) Se kraftdiagrammet til højre. Der er fire kræfter der virker. Den kendte kraft F, vægten mg, normalkraften n og friktionen f.



b)

Kendte: m, R, g, F, θ

Ukendte: n, f, a, α

MMS(x): $n - F\cos\theta = 0$

MMS(y): $ma = F\sin\theta - f - mg$

IMS(cm): $I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha = fR$

GB: $a = R\alpha$

Indsæt GB i IMS(cm) og forkort radius ud. Læg denne ligning sammen med MMS(y).

$$\tfrac{3}{2}ma = F\sin\theta - mg$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}\left(\frac{F\sin\theta}{m} - g\right)}$$

c) Den statiske friktion adlyder uligheden $f \le \mu_s n$, hvilket giver kravet for den statiske friktionskoefficient til at være $\mu_s \ge \dfrac{f}{n}$. Vi skal altså bestemme f og n udtrykt ved de kendte størrelser. Normalkraften fås direkte fra MMS(x) og friktionen fra IMS(cm) ved indsættelse af udtrykket for accelerationen.

$$n = F\cos\theta$$

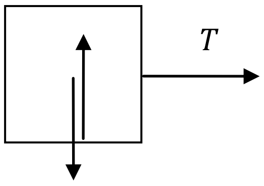
$$f = F\sin\theta - mg - ma = F\sin\theta - mg - \frac{2}{3}F\sin\theta - \frac{2}{3}mg = \frac{1}{3}\left(F\sin\theta - mg\right)$$

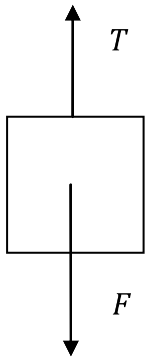
$$\mu_s \ge \frac{f}{n} = \frac{\frac{1}{3}\left(F\sin\theta - mg\right)}{F\cos\theta} = \frac{1}{3}\left(\tan\theta - \frac{mg}{F\cos\theta}\right)$$

$$\boxed{\mu_s \ge \frac{1}{3}\left(\tan\theta - \frac{mg}{F\cos\theta}\right)}$$

Løsning 3

a) Vi opstiller Newtons anden lov for alle kasserne. De 10 N betegnes F .
Vi indfører massen m for de to kasser på bordene.





Venstre situation:

Kendt: m, g, F

Ukendt: a, T

N2(→): $ma = T$

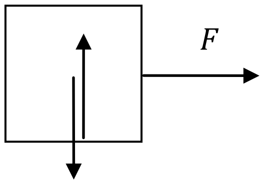
N2(↓): $\frac{F}{g}a = F - T$

Vi lægger de to ligninger sammen så den ubekendte T elimineres.

$$\left(m + \frac{F}{g}\right)a = F$$

$$\boxed{a = \frac{F}{m + \frac{F}{g}}}$$

Højre situation:



Kendt: m, F

Ukendt: a, T

N2(→): $ma = F$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}}$$

Sammenligner vi de to resultater ser vi, at kassen i den højre situation har en større acceleration. Det kan også forklares med at de 10 N der skal drive accelerationen i begge tilfælde, i den højre situation kun skal accelerere en kasse, hvorimod den i den venstre situation skal accelerere to kasser.

Løsning 4

a) Det er kun tyngdekraften der virker, normalkraften begynder først at virke når partiklen bevæger sig.

N2(tan): $$\sum_{\text{tan}} F = ma_{\text{tan}} = mg$$

$$\boxed{a_{\text{tan}} = g}$$

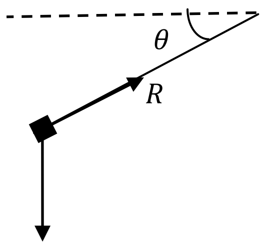
b) Der er kun konservative kræfter der virker, så vi anvender energibevarelse. Den potentielle energi i tyngdefeltet sættes til 0 i startpositionen.

Energibevarelse: $$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$0 + 0 = -mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gR\sin\theta}}$$

b) Vi opstiller Newtons anden lov i radial retning. Fra b) kan vi finde et udtryk for den radiale acceleration. Kraftdiagrammet er vist til højre.



N2(rad): $$\sum_{\text{rad}} F = ma_{\text{rad}} = m\frac{v_2^2}{R} = n - mg\sin\theta$$

Energibevarelse: $$m\frac{v_2^2}{R} = 2mg\sin\theta$$

N2(rad): $$\sum_{\text{rad}} F = ma_{\text{rad}} = 2mg\sin\theta = n - mg\sin\theta$$

$$\boxed{n = 3mg\sin\theta}$$

Løsning 5

a) Idealgasligningen på tilstand a giver $p_a = nRT_a/V_a$. Idealgasligningen fra a til b giver $\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_a 2V_a}{T_b}$ så $T_b = 2T_a$, adiabatligningen fra b til c giver $T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}$, dvs. $2T_a(2V_a)^{\gamma-1} = T_c V_a^{\gamma-1}$, så $T_c = 2^\gamma T_a$.

Ideal gas a:	$p_a V_a = nRT_a$	$\boxed{p_a = \frac{nRT_a}{V_a}}$
Ideal gas a→b (isobar):	$\frac{V_a}{T_a} = \frac{2V_a}{T_b}$	$\boxed{T_b = 2T_a}$
Adiabat b→c:	$T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}$	$2T_a\left(2V_a\right)^{\gamma-1} = T_c V_a^{\gamma-1}$
		$\boxed{T_c = 2^\gamma T_a}$
Isobar varme:	$Q_{ab} = nC_p\left(T_b - T_a\right)$	$\boxed{Q_{ab} = nC_p T_a} = Q_C > 0$
Isochor varme:	$Q_{ca} = nC_V\left(T_a - T_c\right)$	$\boxed{Q_{ca} = nC_V T_a\left(1-2^\gamma\right)} = Q_H < 0$

b) Vi har ovenfor identificeret de to varmer der indgår i effektfaktoren.

Effektfaktor:
$$K = \frac{Q_C}{-W} = \frac{Q_C}{-Q_C - Q_H} = \frac{Q_{ab}}{-Q_{ab} - Q_{ca}} = \boxed{\frac{nC_p T_a}{-nC_p T_a - nC_V T_a\left(1-2^\gamma\right)}}$$

c) De to processer er begge irreversible, så vi tænker reversible versioner, der er delt op i infinitesimale reversible temperaturstigninger dT. For de to processer kan vi så benytte $dQ = nC_p dT$ henholdsvis $dQ = nC_V dT$.

$$\Delta S_{ab} = \int_a^b \frac{dQ}{T} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{nC_p}{T} dT = \boxed{nC_p \ln 2}$$

$\boxed{\Delta S_{bc} = 0}$ (adiabatisk proces)

$$\Delta S_{ca} = \int_{T_c}^{T_a} \frac{nC_V}{T} dT = nC_V \ln\frac{T_a}{T_c} = nC_V \ln\frac{T_a}{2^\gamma T_a} = -n\gamma C_V \ln 2 = \boxed{-nC_p \ln 2}$$

Den samlede entropitilvækst for gassen bliver derfor nul: $\Delta S_{ab} + \Delta S_{bc} + \Delta S_{ca} = 0$