Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, torsdag den 26. maj, 2010, kl. 9:00-13:00

Kursus navn: Fysik 1 Kursus nr. 10022

Tilladte hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

"Vægtning": Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Alle svar skal begrundes.

Sættet består af 6 opgaver.

Opgave 1

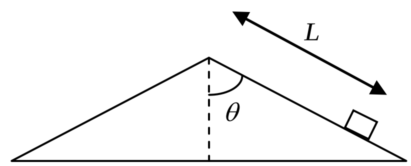
En kugle med masse $m = 7.0 \text{ kg}$ ligger i hvile på jorden. En kuglestøder samler kuglen op og støder den. Kuglen lander i den vandrette afstand $L = 20 \text{ m}$ fra det punkt hvor kuglen slippes. Punktet hvor kuglen slippes ligger i højden $h = 2.2 \text{ m}$ over jorden. Når kuglen slippes danner dens hastighed en vinkel på $\theta = 43^{\circ}$ med vandret.

a) Bestem farten af kuglen i det øjeblik den slippes.

b) Hvor stort et arbejde har kuglestøderen udført på kuglen?

Opgave 2

En bil med massen m kører rundt på ydersiden af en kegle. Bilen udfører en vandret, jævn cirkelbevægelse med farten v. Keglens halve topvinkel betegnes med θ og bilens afstand fra keglens toppunkt med L. Den statiske friktionskoefficient mellem bil og kegle betegnes μ_s.



Situationen er illustreret i figuren hvor et tværsnit er vist; bilen er tegnet som en kasse.

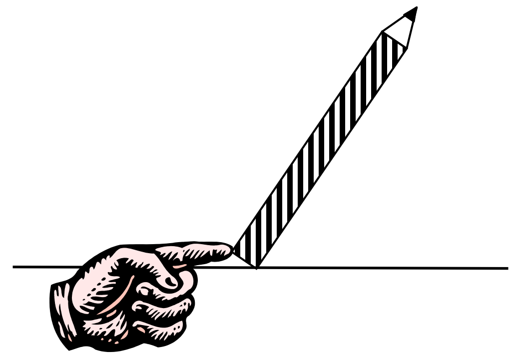
a) Tegn et kraftdiagram for bilen.

b) Bestem udtryk for friktionskraften og normalkraften på bilen.

c) Bestem den største tilladte fart, v_{max}, hvis bilen ikke skal glide ned ad keglen.

Opgave 3

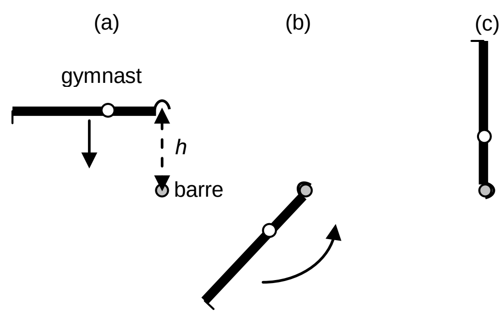
Ved at skubbe med konstant kraft til en hældende blyant, kan man få blyanten til at accelerere retlinet langs bordet, uden at blyanten vælter.
Blyanten kan opfattes som en tynd, homogen stang med massen M og længden L. Der skubbes med en konstant, vandret kraft F nederst på blyanten. Bordet kan antages at være glat.



a) Tegn et kraftdiagram for blyanten. Bestem normalkraften på blyanten, accelerationen af blyanten samt blyantens vinkel med vandret.

Opgave 4

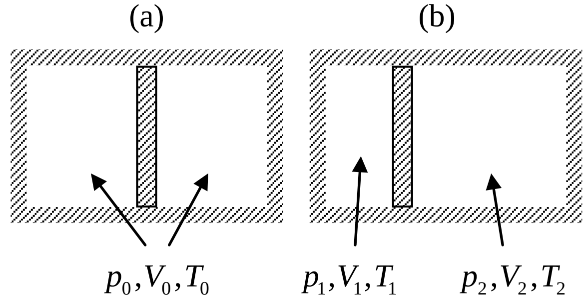
En gymnast med strakte arme antages i en simpel model at være en homogen stang med længden *L*. Gymnasten falder fra hvile fra højden *h* uden at rotere (se figur, (a)), og griber fast i en barre (en fastsiddende, vandret stang) og begynder herefter at dreje om barren uden gnidning mellem barre og hænder (se figur, (b)).



a) Hvad skal *h* være for at gymnasten ender med en håndstand (i hvile i lodret position, se figur, (c))?

Opgave 5

En isoleret beholder er delt i to af et tætsluttende, isolerende stempel. I hver af de to dele af beholderen befinder der sig i startsituation (se figur, (a)) en ideal gas med $\gamma = \frac{3}{2}$. De to gasser har i startsituationen begge tryk p_0, volumen V_0 og temperatur T_0.



Der tilføres nu langsomt en varmemængde til den del af beholderen, der er til højre for stemplet. Under varmetilførslen bevæger stemplet sig mod venstre. Når varmetilførslen stopper, er trykket i højre ende af beholderen $p_2 = \frac{64}{27} p_0$ (se figur, (b)).

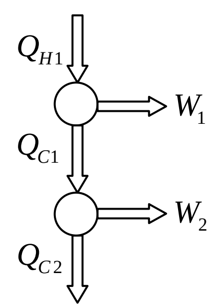
a) Hvilken termodynamisk proces udsættes gassen i venstre del af beholderen for under varmetilførslen? Bestem slutrumfangene V_1 og V_2.

b) Bestem temperaturerne T_1 og T_2.

c) Vis, at arbejdet som stemplet udfører på gassen i venstre halvdel af beholderen er givet ved $W_* = \frac{2}{3} p_0 V_0$.

Opgave 6

En varmemaskine tænkes sammensat af to varmemaskiner, hvor spildvarmen fra den ene maskine tilføres den anden. Virkningsgraderne af de to maskiner er henholdsvis e_1 og e_2. Virkningsgraden af den sammensatte maskine defineres som summen af de to maskiners arbejde divideret med varmen tilført den første maskine.
Maskinen er illustreret i figuren til højre.



a) Vis, at virkningsgraden af den sammensatte maskine er $e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$.

Opgave 1 løsning

a) For en kasteparabel har vi for et skråt kast der starter i origo, at

Kasteparabel: $y = \tan\theta \cdot x - \dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2$

Vi indsætter de kendte værdier for nedslagspunktet, hvis koordinater er $(L, -h)$

Kasteparabel: $-h = \tan\theta \cdot L - \dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}L^2$

Find farten: $v = \left(\dfrac{gL^2}{2\cos^2\theta\left(\tan\theta \cdot L + h\right)}\right)^{1/2} = 13.3\ \text{m/s}$

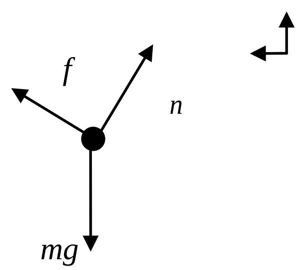
b) Vi benytter arbejdssætningen; kun kuglestøderen og tyngdekraften udfører arbejde.

Arbejdssætn.: $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\text{kuglestøder}} + W_{\text{tyngdekraft}}$

$W_{\text{kuglestøder}} = \frac{1}{2}mv^2 - W_{\text{tyngdekraft}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 770\ \text{J}$

Opgave 2 løsning

a) Et kraftdiagram for bilen er vist til højre.



b)

Kendte: m, L, θ, v

Ukendte: f, n

N2(←): $ma_{\text{rad}} = m\dfrac{v^2}{L\sin\theta} = f\sin\theta - n\cos\theta$

N1(↑): $\sum F_y = f\cos\theta + n\sin\theta - mg = 0$

$f = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{L}$

$n = mg\sin\theta - \dfrac{mv^2}{L\tan\theta}$

c) Når bilen er lige ved at glide ned ad er den statiske friktion maksimal. Vi har derfor udover de to tidligere angivne ligner en sammenhæng mellem friktionen og normalkraften. Bemærk, at farten nu er ukendt.

Kendte: m, L, θ, μ_s

Ukendte: f, n, v_{max}

N2(←): $ma_{\text{rad}} = m\dfrac{v_{\text{max}}^2}{L\sin\theta} = f\sin\theta - n\cos\theta$

N1(↑): $\sum F_y = f\cos\theta + n\sin\theta - mg = 0$

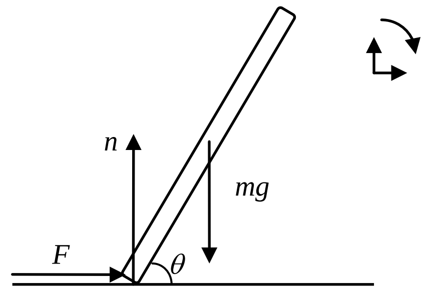
Friktion: $f = \mu_s n$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\dfrac{gL\sin\theta\left(\mu_s\sin\theta - \cos\theta\right)}{\mu_s\cos\theta + \sin\theta}} = \sqrt{\dfrac{gL\tan\theta\left(\mu_s\sin\theta - \cos\theta\right)}{\mu_s + \tan\theta}}$$

$$n = \dfrac{mg}{\mu_s\cos\theta + \sin\theta} \qquad f = \dfrac{\mu_s mg}{\mu_s\cos\theta + \sin\theta}$$

Opgave 3 løsning

a) Kraftdiagrammet er vist her til højre.
Vi opskriver N2 i vandret for blyanten, N2 lodret og impulsmomentsætningen mht. massemidtpunktet.



Kendte: m, L, F

Ukendte: a, n, θ

N2(→): $ma = F$

N1(↑): $\sum F_y = n - mg = 0$

IMS(CM): $\sum \tau = n\frac{L}{2}\cos\theta - F\frac{L}{2}\sin\theta = 0$

$$n = mg$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$\tan\theta = \frac{mg}{F}$$

Opgave 4 løsning

a) Da der er tale om et stød ved (b) indfører vi b- for lige før stødet og b+ for lige efter stødet.
Fra (a) til (b-) benytte energibevarelse. Nulpunkt for potentiel energi i lægges i barrens højde over jorden.

Energibev.(a→b-): $U_{\mathrm{a}} + K_{\mathrm{a}} = U_{\mathrm{b-}} + K_{\mathrm{b-}} = mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$.

Ved stødet er der bevarelse af impulsmoment mht. barren; stødet regnes så kort at tyngdekraftens kraftmoment kan ignoreres og da kontaktkraften angriber fra barren er armen nul.

Impulsmom.bev.(b-→b+): $L_{\mathrm{b-}} = L_{\mathrm{b+}} \Rightarrow \frac{L}{2}mv = I\omega_{\mathrm{b+}}$, hvor $I = \frac{1}{3}mL^2$ er inertimomentet af stangen om dens endepunkt og $\omega_{\mathrm{b+}}$ er den vinkelhastighed som gymnasten påbegynder rotation om barren med.
Stødet er uelastisk, og der kan i stødprocessen hverken benyttes energi- eller impulsbevarelse.
Fra (b) til (c) kan igen benyttes energibevarelse. Med nulpunkt i barrens højde over jorden fås:

Energibev.(b+→c): $U_{\mathrm{b+}} + K_{\mathrm{b+}} = U_{\mathrm{c}} + K_{\mathrm{c}} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}I\omega_{\mathrm{b+}}^2 = mg\frac{L}{2} + 0$.

Kombineres det hele fås $h = \frac{2}{3}L$.

Opgave 5 løsning

a) Da der ikke udveksles varme med omgivelserne er processen 0→1 adiabatisk.

Adiabat(0→1): $p_0 V_0^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$

Ligevægt(1): $p_1 = p_2 = \frac{64}{27} p_0$

$$V_1 = V_0 \sqrt[\gamma]{\tfrac{27}{64}} = \tfrac{9}{16} V_0$$

Rumfang uændret: $V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{23}{16} V_0$

b)

Ideal gas(0→1): $\dfrac{p_0 V_0}{T_0} = \dfrac{p_1 V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \dfrac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \tfrac{64}{27} \tfrac{9}{16} = \tfrac{4}{3} T_0$

Ideal gas(0→2): $\dfrac{p_0 V_0}{T_0} = \dfrac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_0 \dfrac{p_2 V_2}{p_0 V_0} = T_0 \tfrac{64}{27} \tfrac{23}{16} = \tfrac{92}{27} T_0$

c) Da venstre halvdel er isoleret ($Q = 0$) bliver arbejdet udført på gassen til indre energi i gassen.

1.H.S.: $\Delta U = Q - W \Rightarrow W = -\Delta U = -nC_V \left(T_1 - T_0 \right)$

$$W = -\frac{p_0 V_0}{R T_0} 2R \left(\tfrac{4}{3} T_0 - T_0 \right) = -\tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

W er arbejdet udført af gassen i venstre halvdel, vi søger arbejdet på gassen:

$$W_* = -W = \tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

Eller direkte beregnet:

$$W_* = -W = -\frac{1}{\gamma - 1} \left(p_0 V_0 - p_1 V_1 \right) = -\frac{1}{\frac{3}{2} - 1} p_0 V \left(1 - \frac{9}{16} \cdot \frac{64}{27} \right) = \tfrac{2}{3} p_0 V_0$$

Opgave 6 løsning

a)

Maskine 1: $e_1 = \dfrac{W_1}{Q_{H1}}$

Maskine 2: $e_2 = \dfrac{W_2}{Q_{H2}} = \dfrac{W_2}{-Q_{C1}}$

Maskine 1+2: $e = \dfrac{W_1 + W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \dfrac{W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \dfrac{W_2}{Q_{H1}} = e_1 + \dfrac{e_2 Q_{H2}}{Q_{H1}} = e_1 - \dfrac{e_2 Q_{C1}}{Q_{H1}}$

$$e = e_1 - \frac{e_2 Q_{C1}}{Q_{H1}} = e_1 - e_2 \left(e_1 - 1 \right) = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$