Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, torsdag den 28. maj, 2009, kl. 9:00-13:00

Kursus navn: Fysik 1 Kursus nr. 10022

Tilladte hjælpemidler: Alle hjælpemidler er tilladt.

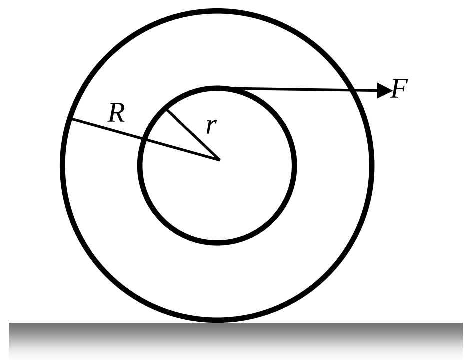
"Vægtning": Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Alle svar skal begrundes.

Sættet består af 5 opgaver.

Opgave 1

Et hjul består af to ringe med radierne r og R (de to ringe er fastgjort til hinanden med tynde metalrør, men da disse ikke har nogen betydning for inertimomentet eller massen af hjulet, er de ikke vist i figuren). Hver ring har massen M. Hjulet drives fremad ved at toppunktet af den indre ring påvirkes af en vandret kraft F, hvorefter hjulet ruller på jorden.

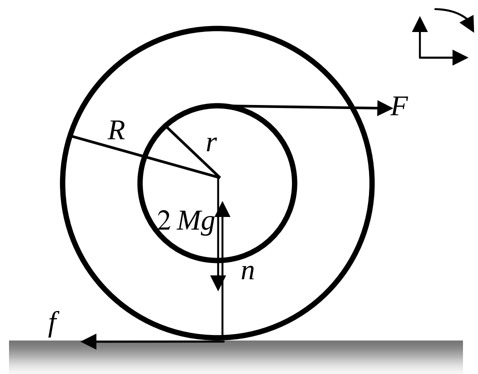


a) Tegn et kraftdiagram for hjulet.

b) Bestem hjulets vinkelacceleration.

c) Hvad skal der gælde om den statiske friktionskoefficient μ_s for at den beskrevne bevægelse er mulig?

Opgave 1 løsning



a) Kraftdiagrammet er vist til højre.

b)

Ukendte: a_x, α, f, n

Vi opskriver N2 i vandret og lodret retning, impulsmomentsætningen mht. massemidtpunktet samt den kinematiske sammenhæng mellem translation og rotation.

N2(→): $2Ma_x = F - f$

N2(↑): $2Ma_y = n - 2Mg = 0$

IMS(CM): $M\left(r^2 + R^2\right)\alpha = Fr + fR$

Kinematik: $a_x = R\alpha$

$$\alpha = \frac{F}{M}\frac{r+R}{r^2+3R^2}$$

c)

Vi må kræve at uligheden $f \le \mu_s n$ er opfyldt. Vi bestemmer de indgående størrelser.

$$f = F - 2Ma_x = F - 2MR\alpha = F - \frac{2MRF(r+R)}{M\left(r^2+3R^2\right)} = \frac{F\left(r^2+3R^2-2rR-2R^2\right)}{r^2+3R^2} = \frac{F\left(R-r\right)^2}{r^2+3R^2}$$

Det ses, at friktionskraften er positiv, dvs. f peger i den tegnede retning.

N2(↑) giver $n = 2Mg$.

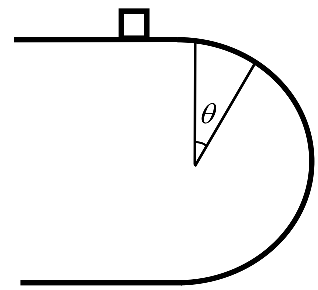
Uligheden for statisk friktion er $f \le \mu_s n$.

Indsættelse af udtrykkene for den statiske friktion og normalkraften giver:

$$\mu_s \ge \frac{F}{2Mg}\frac{\left(R-r\right)^2}{r^2+3R^2}.$$

Opgave 2

Et transportbånd transporterer kasser med konstant fart v_0. Efter et vandret stykke kommer kasserne ud på et halvcirkelformet stykke. Den statiske friktionskoefficient mellem kasser og transportbånd er μ_s.

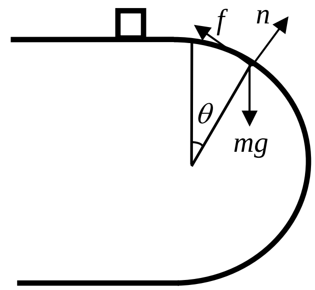


a) Tegn et kraftdiagram (free-body diagram) for kassen, når den befinder sig på cirkelbuen og stadig bevæger sig med farten v_0. Bestem udtryk for normalkraften og friktionskraften som funktion af vinklen θ (se figuren) og farten v_0, i den nævnte situation.

b) Vis, at den vinkel, θ ved hvilken kasserne begynder at glide i forhold til transportbåndet tilfredsstiller ligningen $\cos\theta - \frac{1}{\mu_s}\sin\theta = \frac{v^2}{gR}$, hvor R betegner radius af halvcirklen og g størrelsen af tyngdeaccelerationen.

Opgave 2 løsning

a)



Vi opskriver N2 for radial og tangentiel bevægelse, og husker at farten er konstant, hvorfor $a_{\text{tan}} = 0$. Lad m betegne massen af kassen.

N2(rad): $ma_{\text{rad}} = m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - n$

N2(tan): $ma_{\text{tan}} = mg\sin\theta - f = 0$

$$n = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$f = mg\sin\theta$$

b)

Friktion: $f \leq \mu_s n$

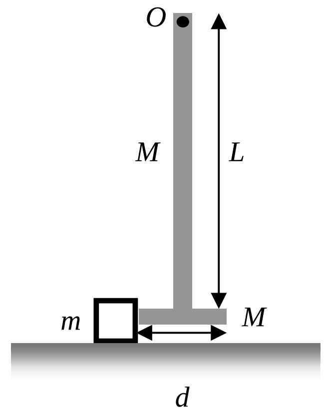
Indsæt udtrykkene for normalkraften og friktionskraft i uligheden for den statiske friktion, og benyt lighedstegn for maksimal friktion:

N2(rad): $mg\sin\theta = \mu_s\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$

divider med m og omskriv: $\frac{v^2}{gR} = \cos\theta - \frac{1}{\mu_s}\sin\theta$

Opgave 3

Til afprøvning af emners følsomhed overfor sammenstød benyttes opstillingen skitseret i figuren til højre. Det emne, der skal undersøges bliver placeret på et bord (i figuren en kasse med masse m). Kassen udsættes for et stød med en hammer (det grå objekt i figuren). Hammeren består af en lang, tynd stang med længde L og masse M, der er sat sammen med et tyndt hammerhoved, der har bredde d og ligeledes masse M. Hammeren er ophængt i punktet O og kan rotere friktionsfrit omkring en vandret akse, der er vinkelret på papirets plan. For at teste emnet hæves hammeren så den tynde stang ligger vandret, og den slippes herefter fra hvile.



a) Vis, at inertimomentet af hammeren med hensyn til rotationsaksen er $I = M\left(\frac{4}{3}L^2 + \frac{1}{12}d^2\right)$.

Inertimomentet af hammeren, I, kan herefter antages at være en kendt størrelse, der i det følgende skal benyttes ved angivelse af svar.

Hammeren slippes fra en situation hvor stangen holdes vandret, og rammer herefter kassen i et elastisk stød.

b) Bestem hammerens vinkelhastighed ω_2, umiddelbart før den rammer kassen.

c) Opstil en eller flere ligninger, hvoraf hammerens vinkelhastighed ω_3, umiddelbart efter den har ramt kassen, kan bestemmes, udtrykt ved kendte størrelser. Der skal ikke udledes en formel for ω_3.

Opgave 3 løsning

a) Inertimomentet beregnes ved hjælp af parallelakseteoremet:

$$I = I_{\text{stang}} + I_{\text{hammerhoved}} = \left(\tfrac{1}{3}ML^2\right)_{\text{stang}} + \left(\tfrac{1}{12}Md^2 + ML^2\right)_{\text{hammerhoved}} = M\left(\tfrac{4}{3}L^2 + \tfrac{1}{12}d^2\right)$$

1: betegner situationen hvor stangen holdes vandret
2: betegner lige før sammenstødet
3: betegner lige efter sammenstødet

b) 1→2 systemet er hammer; vi benytter energibevarelse; $U = 0$ på bordet.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$2MgL + 0 = Mg\frac{L}{2} + \tfrac{1}{2}I\omega_2^2$$

$$\omega_2 = \sqrt{3MgL / I}$$

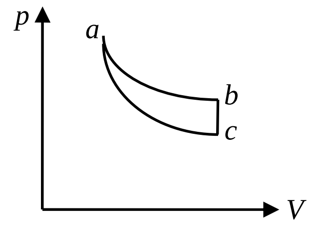
c) 2→3 systemet er hammer og kasse; vi benytter energibevarelse samt impulsmomentbevarelse

$$U_2 + K_2 = U_3 + K_3 \qquad 0 + \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_3^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_3^2$$

$$L_2 = L_3 \qquad 0 + I\omega_2 = mv_3L + I\omega_3$$

Opgave 4

1.00 mol af en ideal, énatomig gas har i tilstanden *a* 1.00 atmosfæres tryk og temperaturen 293 K, og gennemgår en kredsproces, som skitseret i figuren. Først udvides gassen isotermt, så rumfanget forøges til 56.0 L. Dernæst trækkes varme ud af gassen ved konstant volumen, således at trykket i gassen falder. Endelig bliver gassen ved en adiabatisk kompression ført tilbage til starttilstanden.



a) Beregn trykkene p_b og p_c.

b) Bestem temperaturen T_c.

c) Bestem gassens entropiændring for den isochore proces.

d) Bestem virkningsgraden af varmemaskinen.

Opgave 4 løsning

a) Gassen er énatomig, så $\gamma = 5/3$.

Isoterm a→b: $p_a V_a = p_b V_b \Rightarrow p_b = p_a \dfrac{V_a}{V_b} = 0.429$ atm

Adiabat c→a er: $p_a V_a^\gamma = p_c V_c^\gamma \Rightarrow p_c = p_a \left(\dfrac{V_a}{V_c}\right)^\gamma = 0.244$ atm

b)

Isochor b→c: $\dfrac{p_b}{T_b} = \dfrac{p_c}{T_c} \Rightarrow T_c = T_b \dfrac{p_c}{p_b} = 167$ K

c) Isochor proces er irreversibel men da entropien er en tilstandsfunktion tænker vi os en reversibel isochor proces med samme start- og sluttilstand.

$dS = dQ/T = nC_V dT/T = n\tfrac{3}{2}RdT/T$

Entropiændring b→c: $\displaystyle\int_{T_b}^{T_c} n\tfrac{3}{2}R\frac{dT}{T} = n\tfrac{3}{2}R\ln\left(\frac{T_c}{T_b}\right) = -7.01$ J/K

d)

Arbejde a→b (isoterm): $W_{ab} = nRT_a \ln\left(\dfrac{V_b}{V_a}\right) = 2.06$ kJ

Arbejde b→c (isochor): $W_{bc} = 0$ J

Arbejde c→a (adiabat): $W_{ca} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(p_c V_c - p_a V_a\right) = -1.57$ kJ

Arbejde totalt: $W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = 490$ J .

Varme tilført: $Q_H = Q_{ab} = W_{ab} = 2.06$ kJ

Virkningsgrad: $e = \dfrac{W}{Q_H} = \dfrac{W}{W_{ab}} = 0.238$

Opgave 5

En ideal gas befinder sig i en tætsluttende beholder. Man ønsker at fordoble gassens volumen og tryk ved at udføre to efterfølgende delprocesser. Delprocesserne kan være isochore, isobare eller isoterme processer.

a) Hvor mange forskellige muligheder er der for sammensætning af de to delprocesser, så det ønskede resultat opnås? Skitsér de mulige processer.

Opgave 5 løsning

Der er i alt 3*2=6 muligheder for at sammensætte processerne. Alle 6 kan give de ønskede ændringer i volumen og tryk.
I figuren er vist alle seks muligheder.