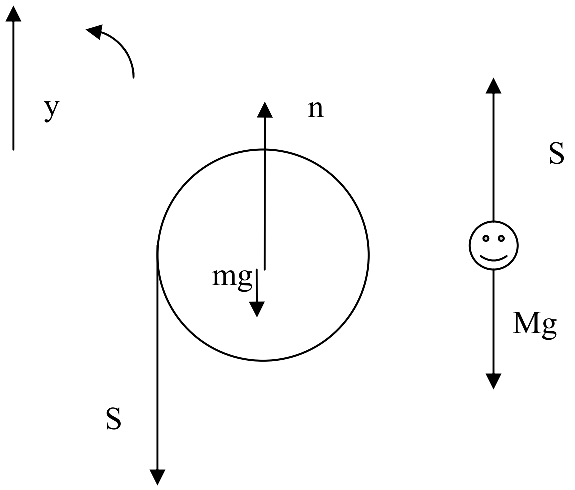
DTU EKSAMEN 10022 MAJ 2008 – KORT LØSNING

1a. Til højre ses kraftdiagrammer for cylinder og abe. Der er tre ubekendte der ønskes bestemt: α, S, n (bemærk, at accelerationen er kendt), så vi har behov for tre ligninger. Vi opskriver N2 for aben i lodret retning, samt MMS i lodret retning og IMS for cylinderen.



MMS(abe): $Ma = S - Mg$

MMS(cyl.): $ma = n - mg - S = 0$

IMS(CM): $\frac{1}{2}mr^2\alpha = Sr$

Løses ligningerne fås, at

$S = M(a+g)$

$n = (M+m)g + Ma$

$\alpha = \frac{2M}{m}\frac{a+g}{R}$.

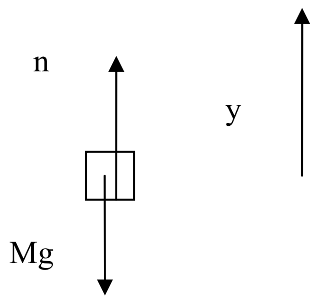
2a.

Den mekaniske energi af vognen er bevaret, så vi benytter $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$, hvor 1 henviser til startpositionen og 2 til hvor vognen er i bunden (position B). Vi har, at $U_2 \equiv 0$ og $K_1 = 0$, så vi får

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_2^2 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh} \;.$$

2b.

Der er tale om en cirkelbevægelse, så vi opskriver N2 radialt:



$\frac{Mv_2^2}{R} = n - Mg$ indsættelse af ovenstående giver

$$\frac{M2gh}{R} = n - Mg \;\Rightarrow\; n = Mg\left(1 + \frac{2h}{R}\right)$$

2c.

Betragt systemet i startsituationen og et sted på cirkelbuen CD. Vi opskriver energibevarelse for de to positioner. Da der er tale om en cirkelbevægelse, kan vi desuden opskrive N2 i radial retning.

$$U_1 + K_1 = U_3 + K_3 \;\Rightarrow\; Mgh = MgR\sin(\theta) + \frac{1}{2}Mv_3^2$$

$$\frac{Mv_3^2}{R} = Mg\sin(\theta) - n$$

To ubekendte, normalkraften og hastigheden i slutsituationen. Løsning: $n = Mg\left(3\sin(\theta) - \frac{2h}{R}\right)$.

Den samlede kraft rettet mod cirklens centrum er da

$$F = Mg\sin(\theta) - n = Mg2\left(\frac{h}{R} - \sin(\theta)\right).$$

3a.

Vi vælger at betegne begyndelsen af isobaren $\left(V_0, 7p_0\right)$ i kredsprocessen med a. Process 3-1 er en adiabat da den foregår hurtigt.

$W_{ab} = p_a\left(V_b - V_a\right) = 7p_0\left(4V_0 - V_0\right) = 21p_0V_0$; isobar;

$W_{bc} = 0$; isochor, der udføres intet arbejde;

$W_{ca} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(p_cV_c - p_aV_a\right) = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(p_0 4V_0 - 7p_0V_0\right) = \dfrac{-3}{\gamma - 1}p_0V_0 = \dfrac{-15}{2}p_0V_0$; adiabat;

$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = \dfrac{27}{2}p_0V_0$

3b.

$$e = \frac{W}{Q_H}$$

$$Q_H = Q_{ab} = nC_p(T_b - T_a) = \frac{C_p}{R}(p_bV_b - p_aV_a) = \frac{21C_p}{R}p_0V_0$$

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{\frac{27}{2}p_0V_0}{\frac{21C_p}{R}p_0V_0} = \frac{27}{21\cdot 2\cdot\frac{7}{2}} = \frac{27}{21\cdot 7} = 18.4\%\,.$$

4a.

Opvarmningen af luften i bildækket foregår ved konstant volumen; ideal gas ligningen giver da

$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 4.55 \times 10^5 \text{ Pa} = 4.50 \text{ atm}$.

4b.

Opvarmningen af dækket er irreversibel; vi tænker på en reversibel isochor opvarmning i stedet.

$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nC_V dT}{T} = \frac{5}{2} nR \int \frac{dQ}{T} = \frac{5}{2} n_1 R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 9.54 \text{ J/K}$.

4c.

$n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 1.83 \text{ mol}$; stofmængden i dækket før opvarmningen;

$n_3 = \frac{p_3 V_3}{RT_3} = \frac{p_{\text{atm}} V_1}{RT_2} = 0.406 \text{ mol}$; efter udsivningen; temperaturen i dækkes antages ikke at ændres;

$-\Delta n = n_1 - n_3 = 1.42 \text{ mol}$; stofmængden der er sivet ud.

Alternativt kan udsivningen opfattes som en adiabatisk proces.

$p_1 V_1^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma} \Rightarrow V_3 = 35.14 \text{ L}$

$n_3 = \frac{V_1}{V_3} n_1 = 0.625 \text{ mol.}$

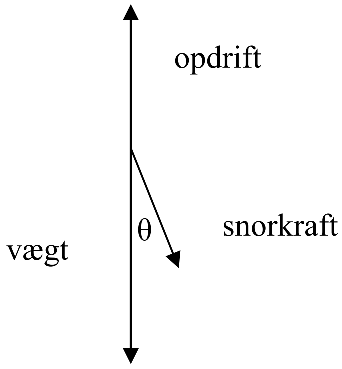
$-\Delta n = n_1 - n_3 = 1.21 \text{ mol}$; stofmængden der er sivet ud.

5a.
For at demonstrere at systemet vil udføre en harmonisk svingning for små udsving, skal det vises, at bevægelsesligningen for systemet har formen $\ddot{\theta} + k\theta = 0$, hvor $k > 0$ og $|\theta| \ll 1$. Vi kan fx opskrive impulsmomentsætningen mht. snorens fastgøringspunkt på jorden. Et kraftdiagram ses herunder.
IMS: $\rho_g V l^2 \ddot{\theta} = \rho_g V g l \sin(\theta) - \rho_l V g l \sin(\theta)$ (opdrift og vægt har begge samme arm, snorkraft ingen).

$\ddot{\theta} + \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ som for små vinkler bliver til

$\ddot{\theta} + \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \frac{g}{l} \theta = 0$, der ses at repræsentere en harmonisk svingning da $\rho_l > \rho_g$.

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \frac{g}{l}}$$



5b.
$\omega = \sqrt{\left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \rho_g = \rho_l / 2$; tætheden af gassen skal være halvdelen af lufts tæthed;