Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 24. maj 2005

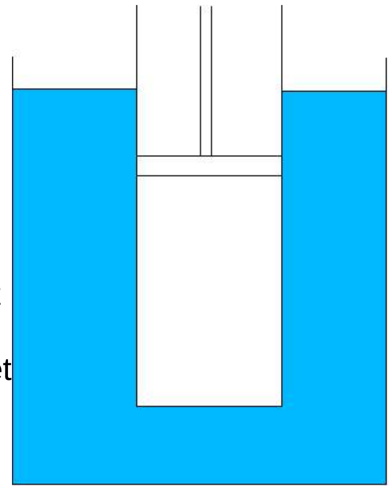
Kursus navn: Fysik 1 Kursus nr.: 10022

Tilladte hjælpemidler: Alle hjælpemidler tilladt.

"Vægtning": Besvarelsen vægtes som en helhed.

Opgave 1

En cylinder med varmeledende vægge er nedsænket i et vandbad hvori der ligger en del isterninger (se figuren); vandbadet har temperaturen 0.00°C. Cylinderen indeholder $V_1 = 4.00$ liter ren ilt, O_2, der kan betragtes som en ideal gas. Cylinderen er udstyret med et ikke-varmeledende stempel på toppen. Gassen i cylinderen gennemgår nu tre på hinanden følgende processer: (1) stemplet trykkes hurtigt nedad så gassen komprimeres; (2) stemplet fastholdes i den position det har opnået efter komprimeringen, og gassen vender tilbage til temperaturen af vandbadet; (3) stemplet bliver langsomt trukket op til startpositionen. Der er tale om en kredsproces.



a Hvad er typerne af de tre processer gassen gennemgår? Argumenter kort for dine svar.

I udgangssituationen har gassen volumenet $V_1 = 4.00$ liter og trykket $p_1 = 0.800$ atm. Efter komprimeringen er volumenet $V_2 = 1.00$ liter.

b Bestem varmemængderne Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} tilført gassen og arbejderne W_{12}, W_{23}, W_{31} udført af gassen for hver delproces.

c Bestem entropiændringen af gassen for hver af delprocesserne samt for vand og is blandingen ved en hel kredsproces.

d Efter at kredsprocessen er udført er en del af isen smeltet. Bestem massen af den smeltede is.

Løsning:

a Første process foregår hurtigt, så der er tale om en adiabatisk proces; anden proces foregår ved konstant volumen så der er tale om en isochor; den tredie proces foregår langsomt så gassen er i termisk ligevægt med vandbadet, der er derfor tale om en isoterm proces.

b Da der er tale om en kredsproces ved vi, at sluttemperaturen er lig med starttemperaturen og vi har dermed følgende værdier i startsituationen:
$V_1=4.00$ L, $p_1=0.800$ atm, $T_1=273$ K. Da der er tale om en ideal gas kan vi beregne stofmængden, der er konstant gennem hele processen, ud fra idealgasligningen:
$n=\frac{p_1 V_1}{RT_1}=0.143$ mol. Der er tale om ren ilt og dvs at $C_V=\frac{5}{2}R=20.8$ J/(mol K) og $\gamma=\frac{7}{5}=1.40$; det er også muligt at slå de præcise værdier op, der er lille forskel på resultaterne.
Med disse værdier kan vi regne os vej gennem processerne 1->2->3->1.
<u>1->2</u> (adiabat)
Vi benytter $p_1 V_1^\gamma=p_2 V_2^\gamma$ hvor kun p_2 er ubekendt da $V_2=1.00$ L og vi finder $p_2=5.57$ atm.
Vi benytter $T_1 V_1^{\gamma-1}=T_2 V_2^{\gamma-1}$ hvor kun T_2 er ubekendt og vi finder $T_2=476$ K.
Første hovedsætning $\Delta U_{12}=Q_{12}-W_{12}$ bliver for en adiabat $\Delta U_{12}=-W_{12}$ da $Q_{12}=0$ J.
For at beregne tilvæksten i indre energi kan vi som altid benytte:
$\Delta U_{12}=nC_V(T_2-T_1)=603$ J. Vi får dermed at $W_{12}=-603$ J.

<u>2->3</u> (isochor)
For den isochore proces er $V_3=V_2$ og der udføres intet arbejde dvs $W_{23}=0$ J hvorved første hovedsætning bliver $\Delta U_{23}=Q_{23}$. Som før kan vi beregne tilvæksten i indre energi som $\Delta U_{23}=nC_V(T_3-T_2)=-603$ J idet $T_3=T_1$. $Q_{23}=-603$ J. Vi kan desuden beregne sluttrykket ved $p_2/T_2=p_3/T_3$ hvilket giver $p_3=3.20$ atm (denne størrelse skal dog ikke bruges til noget).

<u>3->1</u> (isoterm)
For den isoterme proces er $\Delta U_{31}=0$ og første hovedsætning $\Delta U_{31}=Q_{31}-W_{31}$ bliver for en isoterm $Q_{31}=W_{31}$. Arbejdet for en isoterm proces kan beregnes som
$W_{31}=\int_{V_3}^{V_1} p dV=\int_{V_3}^{V_1}\frac{nRT_3}{V}dV=nRT_3\log\left(\frac{V_1}{V_3}\right)=450$ J. $Q_{31}=450$ J.

Opsummerende:
$Q_{12}=0$ J; $Q_{23}=-603$ J; $Q_{31}=450$ J.
$W_{12}=-603$ J; $W_{23}=0$ J; $W_{31}=450$ J.

c
<u>1->2</u> (adiabat)

Der udveksles ingen varme med omgivelserne ved den adiabatiske proces, hvorfor der ikke sker nogen entropiændring: $\Delta S_{12}=0$ J/K.

2->3 (isochor)

Den isochore proces er ikke reversibel. For at beregne entropitilvæksten tænker vi os en revesibel proces hvor temperaturen sænkes reversibelt i infinitesimale skridt. Dette giver entropitilvæksten $\Delta S_{23}=nC_V\log\left(\frac{T_3}{T_2}\right)=-1.65$ J/K ($dS=dQ/T=nC_V dT/T$ der er integreret mht den tilførte varme).

3->1 (isoterm)

For en reversibel isoterm proces kan vi beregne entropi tilvæksten som $\Delta S_{31}=Q_{31}/T_3=450\,J/273\,K=1.65$ J/K. Værdien kunne også være beregnet udfra $\Delta S_{12}+\Delta S_{23}+\Delta S_{31}=0$ idet der er tale om en kredsproces og entropien er en tilstandsfunktion: dette giver ligningen $\Delta S_{23}=-\Delta S_{31}$.

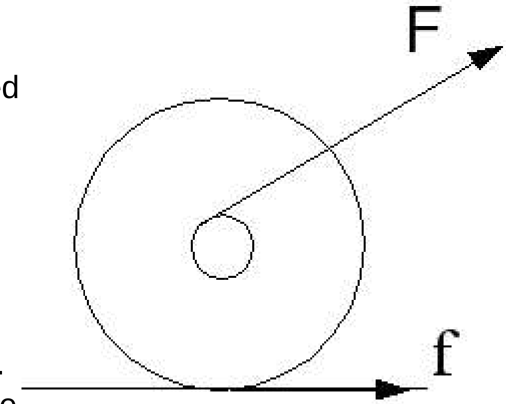
Is/vand

Der tilføres varmen $Q=-(Q_{12}+Q_{23}+Q_{31})=153\,J$ og entropitilvæksten findes til $\Delta S=Q/T=0.56$ J/K.

d Da der er tale om et isoleret system vil den varme som gassen mister blive tilført vandet og isen. $Q=Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=-153\,J=-Q_{is}\Rightarrow Q_{is}=mL=153$ J. Indsættes $L=334$ kJ/kg findes $m=0.458$ g (svarer til en lille isterning med sidelængden 7.70 mm idet massetætheden af vand er 10^3 kg/m^3).

Opgave 2

En yo-yo som vist i figuren består af to massive cylindre med den samlede masse M og radius R er placeret på et bord. De to cylindre er sat sammen med en lille cylinder med radius r hvis masse kan ignoreres. Omkring den lille cylinder er viklet en snor. Snoren kan ikke glide. En trækkraft F hiver i snoren og den danner en konstant vinkel θ med vandret. Den statiske gnidningskoefficient mellem yo-yo og underlag er μ_s og den kinematiske gnidningskoefficient mellem yo-yo og underlag er μ_k. Svarene bedes udtrykt ved de i opgaveteksten anførte betegnelser samt tyngdeaccelerationen g.



a Hvor stor en kraft kan man trække i snoren med så yo-yoen ikke letter?

Det antages herefter, at der trækkes i snoren med en trækkraft der stor nok til at få yo-yoen til at bevæge sig, men ikke til at få den til at lette. Desuden antages friktionskraften f at have retning som vist i figuren.

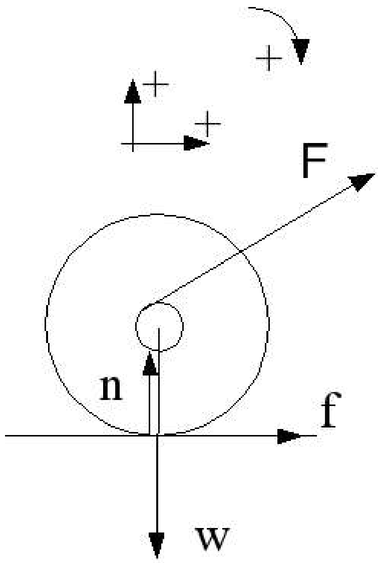
b Bestem yo-yoens acceleration når den glider på underlaget.

c Bestem yo-yoens acceleration når den ruller uden at glide på underlaget.

d Hvad er den maksimale størrelse af kraften F for at yo-yoen ruller uden at glide?

Løsning:

I figuren til højre er vist et kraftdiagram for systemet. Der virker fire kræfter, trækkraften, friktionskraften, tyngdekraften og en normalkraft.



a Lige når yo-yoen er ved at lette bliver normalkraften nul; desuden er acceleration i y-retningen lig med nul. Vi opskriver MMS i y-retningen: $Ma_y = F\sin(\theta) + n - Mg$ hvoraf vi finder, at $F = Mg/\sin(\theta)$.

b Vi opskriver massemidtpunktssætningen projiceret på vandret og lodret samt impulsmomentsætningen mht yo-yoens geometriske centrum.

MMS(x): $Ma_x = F\cos(\theta) + f$

MMS(y): $Ma_y = F\sin(\theta) + n - Mg$

Normalkraften fås fra MMS(y) med $a_y = 0$:

$$Ma_y = 0 \Rightarrow n = Mg - F\sin(\theta)$$

Kinematisk friktion: $f = \mu_k n = \mu_k(Mg - F\sin(\theta))$

Indsat i MMS(x) findes $a_x = \frac{F}{M}(\cos(\theta) - \mu_k \sin(\theta)) + \mu_k g$.

c Vi opskriver igen massemidtpunktssætningen projiceret på vandret og lodret samt impulsmomentsætningen mht yo-yoens geometriske centrum.

MMS(x): $Ma_x = F\cos(\theta) + f$

MMS(y): $Ma_y = F\sin(\theta) + n - Mg$

IMS mht massemidtpunktet af yo-yo:

$$I\alpha = Fr - fR$$

Normalkraft fås fra MMS(y) med $a_y = 0$:

$$Ma_y = 0 \Rightarrow n = Mg - F\sin(\theta)$$

Geometrisk bånd/
ren rulning: $a_x = \alpha R$

Sidstnævnte indsat i MMS(x) og IMS giver $Ma_x = F\cos(\theta) + f$ og $\frac{1}{2}MRa_x = Fr - fR$. Disse kan løses for accelerationen f.eks. ved at multiplicere den første med R og lægge de to ligninger. Herved findes $a_x = \frac{2}{3}\frac{F}{MR}(r + R\cos(\theta))$.

d For statisk friktion gælder uligheden $f \le \mu_s n$. Friktionskraften findes fra spørgsmål c, til at være $f = Ma_x - F\cos(\theta) = \frac{2}{3}F\frac{r}{R} - \frac{1}{3}F\cos(\theta)$. Indsættes dette sammen med udtrykket for normalkraften i uligheden $f \le \mu_s n$ findes $F \le \frac{\mu_s Mg}{\frac{2r}{3R} + \mu_s \sin(\theta) - \frac{1}{3}\cos(\theta)}$.

Opgave 3
Den 31. juli,1994 slog Sergey Bubka i Ukraine sin egen verdensrekord i stangspring. Den nye rekord lød på 6.14 m. I denne opgave skal der foretages simplificerede beregninger på et stangspring som det Sergey Bubka foretog.
Stangspring består af et tilløb efterfulgt af selve springet. Om tilløbet antager vi at det er 45.0 m. Heraf bruges de første 20.0 m til at stangspringeren kommer op i fart; de sidste 25.0 m løber stangspringeren med konstant hastighed. Det kan antages at bevægelsen under den første del af tilløbet foregår med konstant acceleration. Stangspringerens massemidtpunkt kan antages at ligge 1.40 m over jorden under tilløbet. Tyngdeaccelerationen har størrelsen $g=9.82$ m/s².

a Vis, at Sergey Bubkas fart lige før springet er $v_0=9.65$ m/s, under antagelse af at der ikke forsvinder energi i springet.

b Bestem accelerationen i starten af hans tilløb.

Vi betragter nu springet. Den komplicerede sammentrykning af stangen simplificeres med følgende model. Stangen er et stift masseløst legeme og stangspringeren regnes for en partikel med masse $m=75.0$ kg der befinder sig for enden af stangen med længden $L=6.14$ m. Stangens nedre ende antages fastgjort 6.14 m lodret under overliggeren der skal passeres. I det øjeblik stangspringeren slipper kontakten med jorden antages den tangentiale hastighed at være $v_0=9.65$ m/s.

c Bestem vinkelaccelerationen af stangen lige efter at stangspringeren har sluppet kontakten med jorden.

d Tegn et kraftdiagram for stangspringeren og bestem størrelse og retning af den kraft stangen påvirker ham med lige efter at han har sluppet kontakten med jorden. Kommenter resultatet.

Løsning:
a Som antydet i opgaven kan vi benytte energibevarelse, dvs at den mekaniske energi er bevaret. Vi betragter to positioner, den ene lige før springet 1, den anden hvor Bubka er oppe ved overliggeren 2. Energibevarelse giver: $U_1+K_1=U_2+K_2$. Vi sætter $U=0$ når massemidtpunktet er ved jordens overflade og $K_2=0$. Stangspringeren skal have løftet sit massemidtpunkt fra $y_1=1.40$ m til $y_2=6.14$ m over jorden. Vi har, at
$mgy_1+\frac{1}{2}mv_0{}^2=mgy_2 \Rightarrow v=\sqrt{2g(y_2-y_1)}$. Indsættelse af værdierne giver
$v_0=\sqrt{2\cdot 9.82(6.14-1.40)}$ m/s=9.65 m/s.

b I løbet af de første 20.0 m accelerer stangspringeren til en fart 9.65 m/s fra hvile. Der er tale om bevægelse med konstant acceleration og da ingen tidspunkter er opgivet er det mest direkte at anvende formlen $v_2^2-v_1^2=2a(s_2-s_1)$ hvor $s_1=0$ m og $v_1=0$ m/s, dvs
$v_2^2=2as_2$ hvor $v_2=v_0$ og $s_2=20$ m. Vi finder: $a=\frac{v_2^2}{2s_2}=2.33$ m/s².

c Vi betragter rotationen mht den nedre ende af stangen. Det er udelukkende tyngdekraften der leverer et kraftmoment. Med det valgte fortegn bliver impulsmomentsætningen: $I\alpha = -mgL\cos(\theta)$ og da stangen er masseløs er inertimomentet $I = mL^2$ hvoraf vi finder $\alpha = -\frac{g}{L}\cos(\theta_0) = -1.56$ s^{-2} hvor vi har beregnet vinklen fra $\sin(\theta_0) = 1.40\,m/6.14\,m \Rightarrow \theta_0 = 13.2$ °.

d Der er kun to kræfter der påvirker stangspringeren, tyngdekraften og en kraft fra stangen. Kraften fra stangen peger i stangens retning (se figuren). Vi ved, at stangspringeren udfører en cirkelbevægelse (ikke jævn). Newtons anden lov for den radiale acceleration giver $m\,a_{rad} = m\frac{v_0^2}{L} = mg\sin(\theta_0) - F$. Indsættelse af værdier giver $F = -969$ N. Størrelsen af kraften er derfor 969 N med retning mod centrum af cirkelbevægelsen dvs $180^o + \theta_0 = 193.2$ ° (i normal positiv omløbsretning).
Kraften fra stangen peger indad hvilket ikke virker realistisk, modellen er formentlig alt for simpel.

Opgave 4
I et demonstrationsforsøg blæses der med høj hastighed luft lodret ned gennem en tragt. Inde i tragten svæver en bordtennisbold. I figuren til højre er situationen skitseret med et par indtegnde strømlinier. Der er også angivet tværsnitsarealer og hastigheder i to vandrette snit gennem tragten. Forklar hvorfor bordtennisbolden ikke falder ned.

Løsning:
Vi benytter kontinuitetsligningen der siger, at $A_1 v_1 = A_2 v_2$. Denne giver, at $v_2 = (A_1 / A_2) v_1 < v_1$ da $A_2 > A_1$. Bernoullis ligning anvendt på en af de tegnede strømlinier giver $p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ hvor vi kan ignorere bidragene $\rho g y$ da luftens massefylde er beskeden (der blæses luft med høj hastighed). Vi har altså $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$. Når $v_2 < v_1$ følger det af Bernoullis ligning at $p_2 > p_1$.
Trykforskellen giver en opadrettet kraft der er større end tyngdekraften på bordtennisbolden (ellers ville den falde ned).

Opgave 5
I denne opgave betragtes en togvogn hvis øvre del er en kasse uden låg. Togvognen bevæger sig med en hastighed forskellig fra nul uden friktion. Der ligger vand i togvognen. I det følgende betragter vi systemet bestående af togvognen og vandet i den. I tre forskellige situationer (i,ii og iii) skal du afgøre hvad der sker med hver af de tre størrelser: farten v, impulsen p og den kinetiske energi K. De korrekte svar på opgaven skal indføres ved afkrydsning i skemaet herunder; der må kun sættes et kryds per situation per størrelse. Du kan enten afkrydse i skemaet og vedlægge det besvarelsen eller afskrive skemaet i din besvarelse.

(i) Det regner lodret ned og vand akkumuleres i togvognen.
(ii) Som i (i) med den tilføjelse at der i bunden af vognen nu er et hul hvor vandet løber ud. Der løber ligeså meget vand ud af hullet som der falder ned i vognen.
(Iii) Det holder nu op med at regne, men der er stadig et hul i bunden af vognen hvor vandet løber ud.

Til denne opgave ønskes ingen forklaringer.
Løsning:

Situation	v øges	v uforandret	v mindskes	p øges	p uforandret	p mindskes	K øges	K uforandret	K mindskes
i			X		X				X
ii			x			X			X
iii		X				X			X