Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 14. december, 2010

Kursus navn Fysik 1 | Kursus nr. 10020/22/24

Varighed: 4 timer

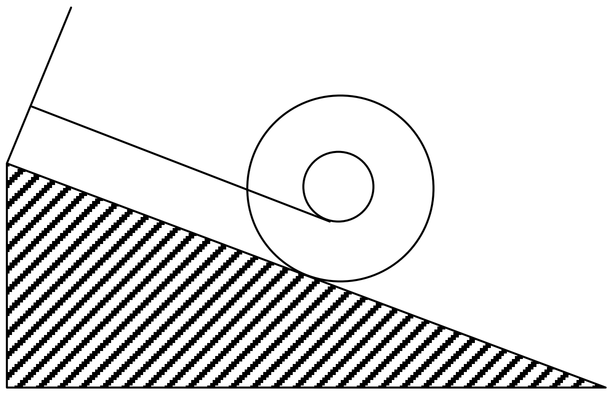
Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler

"Vægtning": Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Alle svar skal begrundes med mindre andet er angivet.
Alle mellemregninger skal medtages.
Der må kun benyttes en simpel lommeregner, dvs. en lommeregner uden computer algebra system.

Opgave 1

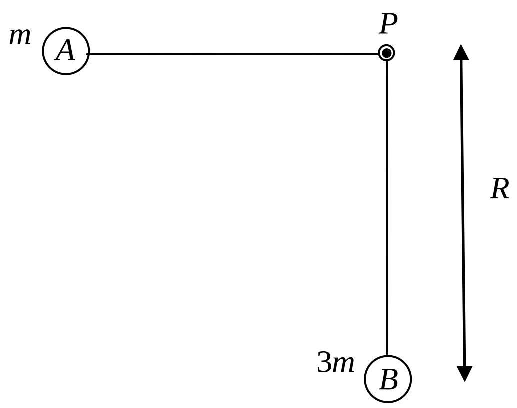
En Yo-Yo befinder sig i hvile på et skråplan. Yo-Yo'en har en ydre radius R og en indre radius r, og dens masse er m. Omkring den indre radius er vundet en snor, der ikke glider i forhold til den indre radius. Yo-Yo'ens massemidtpunkt ligger i centrum af Yo-Yo'en. Snoren løber fra undersiden af den indre radius, parallelt med skråplanet, til en fastgjort stang på toppen af skråplanet. Skråplanet danner vinklen θ med vandret. Den statiske friktionskoefficient mellem Yo-Yo og skråplan er μ_s.



a) Bestem normalkraften, friktionskraften og snorkraften på Yo-Yo'en.
b) Hvad skal der gælde om den statiske friktionskoefficient, μ_s, for at Yo-Yo'en kan befinde sig i den beskrevne situation. Forklar, om den beskrevne situation bliver lettere eller sværere at opnå, hvis den indre radius øges.

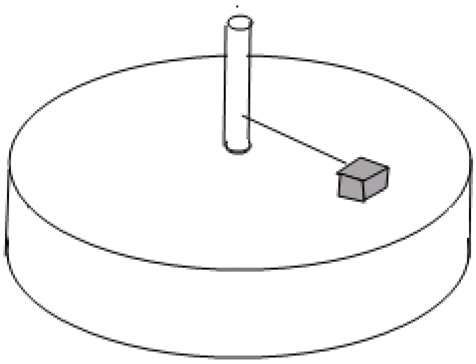
Opgave 2

To penduler *A* og *B* er ophængt i samme punkt (*P*). Det ene hænger lodret og har en lille partikel for enden med massen $3m$. Det andet pendul holdes i hvile i en vandret position. Den lille partikel for enden af det vandrette pendul har massen m. Begge penduler har længden R. Det vandrette pendul slippes og kolliderer i et elastisk stød med det lodrette pendul.



a) Bestem de to massers hastigheder umiddelbart efter kollisionen.
b) Bestem den vinkel som det tunge pendul danner med lodret, når dets fart er nul første gang efter kollisionen.
c) Bestem tabet i kinetisk energi, hvis kollisionen mellem partiklerne havde været fuldstændig uelastisk.

Opgave 3



En lille kasse med masse m befinder sig på en vandret drejeskive. Den statiske friktionskoefficient mellem kasse og drejeskiven er μ_s. Kassen er gennem en vandret, elastisk snor med fjederkonstant k forbundet til en lodret rotationsakse gennem drejeskivens centrum. Rotationsaksen er vinkelret på drejeskiven. Kassen er i hvile i forhold til den roterende drejeskive, og udfører en jævn cirkelbevægelse. I udgangssituationen er snoren ustrakt, med længden r_0.

a) Vis, at den maksimale fart v_1 som kassen kan bevæge sig med, er givet ved $\sqrt{\mu_s g r_0}$, hvis snoren skal være ustrakt.

Nu placeres kassen i afstanden $\frac{5}{4} r_0$ fra rotationsaksen, så den elastiske snor bliver spændt, og drejeskiven sættes til at rotere hurtigere, så kassen bevæger sig med farten $2\sqrt{\mu_s g r_0}$. Kassen udfører igen en jævn cirkelbevægelse.

b) Bestem den statiske friktionskraft, hvis alle kræfter regnes positive mod centrum i cirkelbevægelsen. Er det muligt for systemet at udføre en cirkelbevægelse hvor friktionskraft og fjederkraft peger i hver sin retning? Forklar.

Fysiske formler

Nedenfor er angivet en række formler, der måske kan være til hjælp. Bemærk, at nogle formler kun gælder under specielle forhold, der ikke nødvendigvis er angivet. Samme symboler kan optræde flere steder med forskellige betydninger. Formelsamlingen kan indeholde emner der ikke er relevant for denne eksamen.

Kinematik

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x\left(x - x_0\right)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t$$

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{\tan} = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{r}_{A|B} = \vec{r}_{A|C} + \vec{r}_{C|B}$$

Partikelmekanik

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{A|B} = -\vec{F}_{B|A}$$

$$f_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} n$$

$$f_{\text{s}} \le \mu_{\text{s}} n$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{\text{andre}} = K_2 + U_2$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$$

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -\left(v_{B1x} - v_{A1x}\right)$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}$$

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ydre}} = M\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Stive legemers mekanik

$$v = r\omega$$

$$a = r\alpha$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

$$\sum \tau = I_{\text{cm}} \alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Gravitation

$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$U = -\frac{G m_{\text{E}} m}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G m_{\text{E}}}}$$

Svingninger

$$a = -\omega^2 x$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Fluider

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$B = \rho V g$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{dV}{dt} = Av$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Termodynamik

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = nC\Delta T$$

$$Q = \pm mL$$

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L}$$

$$pV = nRT$$

$$m_{\text{total}} = nM$$

$$M = N_{\text{A}} m$$

$$K_{\text{tr}} = \tfrac{3}{2} nRT$$

$$\tfrac{1}{2} m\left(v^2\right)_{av} = \tfrac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\left(v^2\right)_{av}}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$W = \int p dV$$

$$\Delta U = Q - W$$

$$C_p = C_V + R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

$$W_{\text{adiabat}} = nC_V\left(T_1 - T_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right)$$

$$W_{\text{adiabat}} = \frac{C_V}{R}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right)$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$e = \frac{W}{Q_H}$$

$$K = \frac{Q_C}{-W}$$

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

Elektromagnetisme

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \ldots$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl-free}}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_{\substack{\text{lukket} \\ \text{overflade}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

Matematiske formler

$$\frac{d\left(f(x)+g(x)\right)}{dx} = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)-g(x)\right)}{dx} = f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \exp(ax)dx = \frac{1}{a}\exp(ax)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta} = 1+\tan^2\theta$$

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

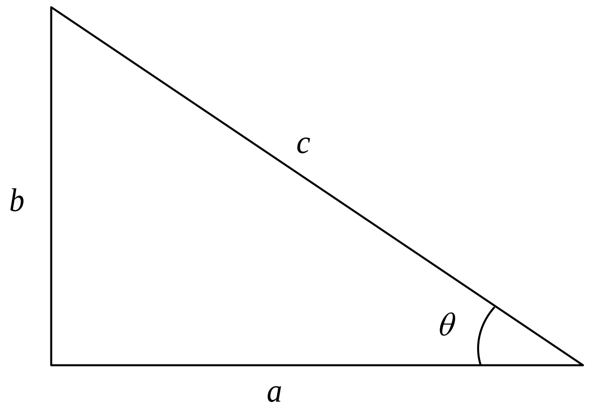
$$x^n y^n = (xy)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$\left(x^n\right)^m = x^{nm}$$

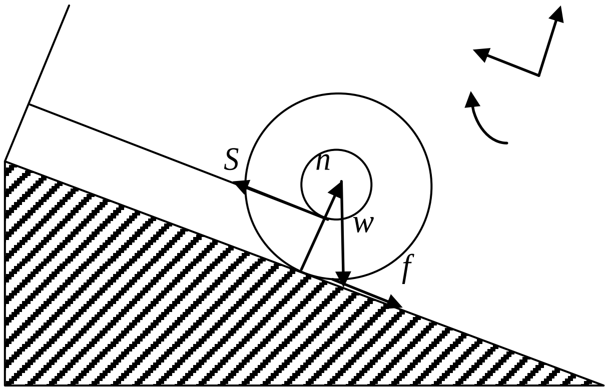
$$\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$$

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0 \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



Løsning 1

a) Til højre er der vist et kraftdiagram for yo-yoen. Der virker tyngdekraft, normalkraft, statisk friktionskraft og snorkraft.



Kendte: m, g, μ_s, θ

Ukendte: w, n, f, S

Tyngdekraft: $w = mg$

N1(↖): $\sum F_x = S - f - w\sin\theta = 0$

N1(↗): $\sum F_y = n - w\cos\theta = 0$

IMS(cm): $\sum \tau = Sr - fR = 0$

$$w = mg$$

$$n = mg\cos\theta$$

$$f = \frac{mg\sin\theta}{\frac{R}{r} - 1}$$

$$S = \frac{mg\sin\theta}{1 - \frac{r}{R}}$$

b) Uligheden for den statiske friktion skal være overholdt, for at situationen er mulig.

N2 (←): $f \le \mu_s n \Rightarrow \mu_s \ge \frac{f}{n} = \frac{\tan\theta}{\frac{R}{r} - 1}$

Af uligheden for den statiske friktionskoefficient ses, at når den indre radius øges blive nævneren mindre, hvorved den statiske friktionskoefficient skal være større, dvs. at det bliver sværere at opnå den beskrevne situation.

Løsning 2

Nulpunkt for den potentielle er i bundpositionen. Vi benytter energibevarelse for at finde den lette masses fart før kollisionen.

Energibetragtning: $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR}$$

Vi benytter impulsbevarelse og energibevarelse på det elastiske stød.

Impulsbevarelse $mv_2 + 3m \cdot 0 = mv_{3,m} + 3mv_{3,3m}$

Energibevarelse $v_2 - 0 = -\left(v_{3,m} - v_{3,3m}\right)$

$$v_{3,m} = -\sqrt{\frac{gR}{2}} \qquad v_{3,3m} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

Vi benytter energibevarelse på den tunge masses bevægelse efter kollisionen.

Energibetragtning: $U_3 + K_3 = U_4 + K_4$

$$0 + \frac{1}{2} 3mv_{3,3m}^2 = 3mgR\left(1 - \cos\theta\right) + 0$$

$$\cos\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 41.4^{\circ} = 0.723 \text{ rad}$$

Fuldstændig uelastisk stød. Vi benytter impulsbevarelse.

Impulsbevarelse $mv_2 + 3m \cdot 0 = \left(m + 3m\right) v_3$

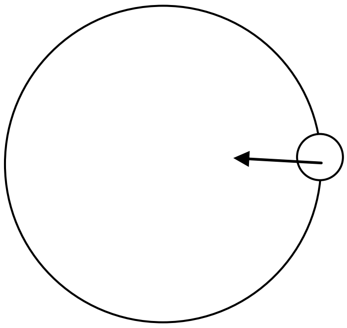
$$v_3 = \frac{1}{4}\sqrt{2gR}$$

Tilvækst i kinetisk energi $\Delta K = \frac{1}{2} 4m \left(\frac{1}{4}\sqrt{2gR}\right)^2 - mgR = \frac{1}{4} mgR - mgr = -\frac{3}{4} mgR$

Der går altså tre fjerdedele af den kinetiske energi tabt i tilfældet med det fuldstændig uelastiske stød.

Løsning 3

a)



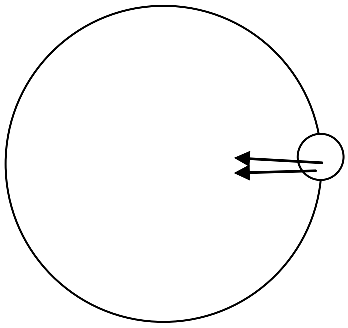
N2(rad): $\sum F = f_{s,\max} = m\dfrac{v_1^2}{r_0}$

Friktion (max.): $f_{s,\max} = \mu_s n$

N1(lodret): $\sum F = n - mg = 0$

$$m\frac{v_1^2}{r_0} = \mu_s mg \Rightarrow v_1 = \sqrt{\mu_s g r_0}$$

b)



N2(rad): $\sum F = f_s + k\left(\tfrac{5}{4}r_0 - r_0\right) = m\dfrac{\left(2\sqrt{\mu_s g r_0}\right)^2}{\frac{5}{4}r_0}$

$$f_s + \frac{1}{4}kr_0 = \frac{16}{5}\mu_s mg$$

$$f_s = \frac{16}{5}\mu_s mg - \frac{1}{4}kr_0$$

Af ovenstående udtryk for friktionskraften ses, at friktionen kan pege væk fra centrum i cirkelbevægelsen hvis fx fjederkonstanten er stor eller massen er lille. Det kan også ske hvis farten i cirkelbevægelsen er lille.