01017 Diskret Matematik E12
Alle bokse fra logikdelens slides

Thomas Bolander

1 Udsagnslogik

1.1 Formler og sandhedstildelinger

symbol	**står for**
$\neg$	**ikke**
$\vee$	**eller**
$\wedge$	**og** ($\wedge \approx A \approx$ And)
$\rightarrow$	**hvis ... så**
$\leftrightarrow$	**... hvis og kun hvis ...**

Definition. Mængden af **formler** i udsagnslogik defineres som følger:

1. Enhver **propositionsvariabel** er en formel.
2. Hvis A er en formel, er $\neg A$ også en formel.
3. Hvis A og B begge er formler, er $(A \vee B)$ også en formel.
4. Hvis A og B begge er formler, er $(A \wedge B)$ også en formel.
5. Hvis A og B begge er formler, er $(A \rightarrow B)$ også en formel.
6. Hvis A og B begge er formler, er $(A \leftrightarrow B)$ også en formel.

$\neg$ **binder stærkere end** $\wedge, \vee$ **binder stærkere end** $\rightarrow, \leftrightarrow$.

formel	**læses**	**kaldes**
$\neg A$	**ikke** A	**negationen** af A
$A \wedge B$	A **og** B	**konjunktionen** af A og B
$A \vee B$	A **eller** B	**disjunktionen** af A og B
$A \rightarrow B$	A **medfører** B	**implikationen** fra A til B
$A \leftrightarrow B$	A **ensbetydende** med B	**biimplikationen** mellem A og B

Sandhedstildeling for en formel: At give en **sandhedsværdi**, **sand** eller **falsk**, til alle propositionsvariable i formlen.

1.2 Sandhedstabeller

Sandhedstabel for $\vee$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Sandhedstabel for $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Sandhedstabel for $\neg$

p	$\neg p$
T	F
F	T

Sandhedstabel for $\leftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Sandhedstabel for $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.3 Opfyldelighed, gyldighed, logisk ækvivalens, osv.

Definition. En formel kaldes **opfyldelig** (eng.: **satisfiable**) hvis den er sand i mindst én sandhedstildeling.

Ækvivalent: Formlen er sand i mindst én af rækkerne i dens sandhedstabel.

Definition. En formel kaldes **gyldig** (eng.: **valid**) eller en **tautologi** (eng.: **tautology**) hvis den er sand i **alle** sandhedstildelinger.

Ækvivalent: Formlen er sand i **alle** rækkerne i dens sandhedstabel.

Definition. En formel kaldes en **modstrid** eller en **kontradiktion** (eng.: **contradiction**) hvis den er **falsk** i **alle** sandhedstildelinger.

Ækvivalent: Formlen er **falsk** i **alle** rækkerne i dens sandhedstabel.

Implikationer $p \to q$ optræder i mange forklædninger i naturligt sprog:

1. q **følger af** p.
2. **Hvis** p **så** q.
3. q **hvis** p.
4. p **kun hvis** q.
5. p er en **tilstrækkelig betingelse** for q.
6. q er en **nødvendig betingelse** for p.

Disse udtrykker alle **præcist** det samme, nemlig $p \to q$.

Definition. En formel B kaldes en **logisk konsekvens** af formlerne $A_1, \ldots, A_n$ hvis B altid er sand når alle $A_1, \ldots, A_n$ er sande.

Mere præcist: Enhver sandhedstildeling som gør alle $A_1, \ldots, A_n$ sande, gør også B sand.

Når B er en logisk konsekvens af $A_1, \ldots, A_n$ skriver vi

$$A_1, \ldots, A_n \models B.$$

En metode til at afgøre logisk konsekvens. Man kan afgøre $A_1, \ldots, A_n \models B$ med følgende metode:

1. Opskriv en sandhedstabel som omfatter samtlige af formlerne $A_1, \ldots, A_n, B$.
2. Tjek at der i enhver række hvor alle $A_1, \ldots, A_n$ får værdien `T` også gælder at B får værdien `T`.

Definition. **Følgeslutning** eller blot **slutning** (eng.: **inference**): Når man fra en række **præmisser** ledes frem til en **konklusion**.

Definition. En slutning kaldes **logisk korrekt** hvis dens logiske form er således, at konklusionen er en logisk konsekvens af præmisserne.

Definition. En slutning hvor både præmisser og konklusioner er formler i udsagnslogik kaldes en **slutningsregel**. Hvis slutningen er **logisk korrekt** (konklusionen er logisk konsekvens af præmisserne) siger vi også den er **sund** (eng.: **sound**).

Definition. To formler A og B kaldes **logisk ækvivalente** hvis de altid har samme sandhedsværdi (i enhver sandhedstildeling).

Når A og B er logisk ækvivalente skriver vi $A \equiv B$.

En metode til at afgøre logisk ækvivalens. Man kan afgøre $A \equiv B$ med følgende metode:

1. Opskriv en sandhedstabel som omfatter A og B.
2. Tjek at A og B får samme sandhedsværdi i hver af rækkerne.

Nogle vigtige logiske ækvivalenser:

$p \vee q \equiv q \vee p$	kommutativitet af $\vee$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	kommutativitet af $\wedge$
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	associativitet af $\vee$
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	associativitet af $\wedge$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributivitet af $\wedge$ over $\vee$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributivitet af $\vee$ over $\wedge$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgan-lov
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan-lov
$\neg\neg p \equiv p$	Elimination af $\neg\neg$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	Elimination af $\leftrightarrow$
$p \to q \equiv \neg p \vee q$	Elimination af $\to$

To metoder til at vise logisk ækvivalens:

1. Sandhedstabel.
2. En række omskrivninger via kendte logiske ækvivalenser (som f.eks. dem på foregående slide).

1.4 Tableau-metoden

disjunktion

F-regel	T-regel
$\begin{array}{c} A \lor B : \mathtt{F} \\ \mid \\ A : \mathtt{F} \\ \mid \\ B : \mathtt{F} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & A \lor B : \mathtt{T} & \\ / & & \backslash \\ A : \mathtt{T} & & B : \mathtt{T} \end{array}$

konjunktion

F-regel	T-regel
$\begin{array}{ccc} & A \land B : \mathtt{F} & \\ / & & \backslash \\ A : \mathtt{F} & & B : \mathtt{F} \end{array}$	$\begin{array}{c} A \land B : \mathtt{T} \\ \mid \\ A : \mathtt{T} \\ \mid \\ B : \mathtt{T} \end{array}$

implikation

F-regel	T-regel
$\begin{array}{c} A \to B : \mathtt{F} \\ \mid \\ A : \mathtt{T} \\ \mid \\ B : \mathtt{F} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & A \to B : \mathtt{T} & \\ / & & \backslash \\ A : \mathtt{F} & & B : \mathtt{T} \end{array}$

biimplikation

F-regel	T-regel
$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B : \mathtt{F} & \\ / & & \backslash \\ A : \mathtt{T} & & A : \mathtt{F} \\ \mid & & \mid \\ B : \mathtt{F} & & B : \mathtt{T} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B : \mathtt{T} & \\ / & & \backslash \\ A : \mathtt{T} & & A : \mathtt{F} \\ \mid & & \mid \\ B : \mathtt{T} & & B : \mathtt{F} \end{array}$

negation

F-regel	T-regel
$\begin{array}{c} \neg A : \mathtt{F} \\ \mid \\ A : \mathtt{T} \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg A : \mathtt{T} \\ \mid \\ A : \mathtt{F} \end{array}$

Bemærk: Til enhver ikke-atomar markeret formel hører netop én tilhørende dekompositionsregel, og når denne er anvendt én gang på hver gren kan vi ikke få noget nyt ud af at anvende den igen. Vi markerer da formlen med et flueben ($\checkmark$).

- **Lukket gren** (eng.: **closed branch**): En gren som indeholder både $A : \mathtt{F}$ og $A : \mathtt{T}$ for en formel A. Lukkede grene markeres med kryds ($\times$) og der anvendes ikke yderligere regler på dem.
- **Åben gren** (eng.: **open branch**): En gren som ikke er lukket.
- **Mættet gren** (eng.: **saturated branch**): En gren hvor alle regler som **kan** anvendes **er** blevet anvendt (alle ikke-atomare formler på grenen er markeret med $\checkmark$). Hvis en gren er både åben og mættet, markeres den med en cirkel ($\bigcirc$).

Algoritme for at afgøre gyldighed af en formel A via tableau-metoden.

1. Start med rodformlen $A : \mathtt{F}$.
2. Anvend dekompositionsreglerne gentagne gange indtil en af følgende er opfyldt:
   - Der findes en åben, mættet gren ($\bigcirc$).
   - Alle grene er lukket ($\times$).
3. Hvis alle grene er lukket er formlen A gyldig. Ellers er den ikke gyldig.

Samtlige egenskaber betragtet kan reduceres til gyldighed:

- *Problem*: Er B en **logisk konsekvens** af $A_1, \ldots, A_n$?

  Ækvivalent problem: Er formlen $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ **gyldig**?
- *Problem*: Er A og B **logisk ækvivalente**?

  Ækvivalent problem: Er formlen $A \leftrightarrow B$ **gyldig**?
- *Problem*: Er A **opfyldelig**?

  Ækvivalent problem: Er $\neg A$ **ikke gyldig**?
- *Problem*: Er A en **kontradiktion**?

  Ækvivalent problem: Er $\neg A$ **gyldig**?

Konklusion: Tableau-metoden kan også benyttes til at afgøre logisk konsekvens, logisk ækvivalens, opfyldelig og kontradiktion.

2 Prædikatlogik

2.1 Formler og fortolkninger

- **Egenskaber** ved objekter, såsom "at have to ben", kaldes også **prædikater**.
- **Konkrete objekter** såsom "morlille" kaldes også **konstanter**.

Dermed:

- **Prædikatsymboler** betegner **prædikater**.
- **Konstantsymboler** betegner **konstanter**.

Et **funktionssymbol** betegner en funktion, dvs.

> noget som afbilder objekter på andre objekter.

Prædikatsymboler som kun tager **ét** argument kaldes **unære** (eller **1-ære**). Eksempler: $M(x), T(x), F(x), S(x)$.

n**-ært prædikatsymbol**: Prædikatsymbol som tager n argumenter.

Prædikatsymboler:	**Funktionssymboler:**
Betegner **egenskaber** ved og **relationer** mellem objekter.	Betegner **funktioner** og **afbildninger** fra objekter på andre objekter.
$P(x_1, \ldots, x_n)$ betyder at $x_1, \ldots, x_n$ står i den **relation til hinanden** som P udtrykker.	$f(x_1, \ldots, x_n)$ betegner **værdien af funktionen** f på argumenterne $x_1, \ldots, x_n$.
Hvis $c_1, \ldots, c_n$ er konstanter, betegner $P(c_1, \ldots, c_n)$ et konkret **udsagn** (sandt eller falsk).	Hvis $c_1, \ldots, c_n$ er konstanter, betegner $f(c_1, \ldots, c_n)$ et konkret **objekt** (en funktionsværdi).

Samtlige ingredienser i prædikatlogik:

- **Konstantsymboler**. Betegnes oftest med symboler som $a, b, c, \ldots$.
- **Funktionssymboler**. Betegnes oftest med symboler som $f, g, h, \ldots$. Et funktionssymbol er n-ært for et $n \geq 1$.
- **Variable**. Betegnes oftest med symboler som $x, y, z, \ldots$.
- **Prædikatsymboler**. Betegnes oftest med symboler som $P, Q, R, \ldots$. Et prædikatsymbol er n-ært for et $n \geq 1$.
- **Kvantorer**: $\forall$ og $\exists$.
- **Udsagnslogiske konnektiver**: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Definition. Mængden af **termer** i prædikatlogik defineres som følger:

1. Ethvert konstantsymbol er en term.
2. Enhver variabel er en term.
3. Hvis f er et n-plads funktionssymbol og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, da er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term.

Definition. En **atomar formel** er et udtryk på formen

$$P(t_1, \ldots, t_n),$$

hvor P er et n-ært prædikatsymbol og $t_1, \ldots, t_n$ er termer.

Definition. Mængden af **formler** i prædikatlogik defineres som følger:

1. Enhver atomar formel er en formel.
2. Hvis A er en formel, er $\neg A$ også en formel.
3. Hvis A og B begge er formler, er $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ også formler.
4. Hvis A er en formel og x en variabel, så er $\forall x A$ og $\exists x A$ formler.

Notation. *Hvis P er et **prædikatsymbol** og $\mathcal{F}$ en **fortolkning**, betegner vi fortolkningen af P i $\mathcal{F}$ med $P^{\mathcal{F}}$.*

Definition. *Et **prædikatlogisk sprog** (eller **første-ordens sprog**) $\mathcal{L}$ består af en mængde af **konstantsymboler**, **funktionssymboler** og **prædikatsymboler**.*

***Formlerne** i $\mathcal{L}$ er da alle de som kan opbygges af de givne konstantsymboler, funktionssymboler og prædikatsymboler.*

Definition. En **fortolkning** $\mathcal{F}$ af et prædikatlogisk sprog $\mathcal{L}$ består af følgende komponenter:

1. En ikke-tom mængde kaldet et **domæne**. Ofte betegnet $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$.
2. En **konstant** $c^{\mathcal{F}}$ for hvert **konstantsymbol** c i $\mathcal{L}$.
3. En **funktion** $f^{\mathcal{F}}$ for hvert **funktionssymbol** f i $\mathcal{L}$.
4. Et **prædikat** $P^{\mathcal{F}}$ for hvert **prædikatsymbol** P i $\mathcal{L}$.

2.2 Frie og bundne variable, åbne og lukkede formler, m.m.

Begrænsning af kvantificering til de elementer af domænet som opfylder egenskaben P foregår ved:

- For eksistenskvantor: $\exists x(P(x) \wedge \cdots)$
- For alkvantor: $\forall x(P(x) \rightarrow \cdots)$

- **Frie variable** benyttes til at betegne **ukendte** eller **uspecificerede** objekter: $x > 2 \wedge x < 5$.
- **Bundne variable** benyttes til **kvantificering**: $\exists x(x > 2 \wedge x < 5)$ eller $\forall x(x > 2 \wedge x < 5)$.

Definition. En **variabeltildeling** hørende til en fortolkning $\mathcal{F}$ er en afbilding, som knytter et element fra $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ til enhver variabel.

Når en formel A er sand i en fortolkning $\mathcal{F}$ under en variabeltildeling v, skriver vi:

$$\mathcal{F}, v \models A.$$

Definition. Antag en formel A indeholder en kvantor $\forall x$ eller $\exists x$. Ved **virkefeltet** (eng.: **the scope**) af kvantoren forstår vi den del af formlen, som består af kvantoren og den parantes som følger den.

Definition. En forekomst af en variabel x i en formel kaldes **bundet**, hvis den ligger indenfor virkefeltet af en kvantor $\exists x$ eller $\forall x$. Ellers kaldes den **fri**.

Definition. En formel kaldes **lukket** hvis alle variable udelukkende har bundne forekomster.

En formel kaldes **åben** hvis alle variable udelukkende har frie forekomster (dvs. formlen er uden kvantorer).

Hvis A er en **lukket formel** som er **sand** i en fortolkning $\mathcal{F}$ (uafhængigt af variabeltildeling), kan vi derfor blot skrive:

$$\mathcal{F} \models A.$$

Vi siger da også at $\mathcal{F}$ er en **model** af formlen A.

Hvis A er **falsk** i fortolkningen $\mathcal{F}$, kalder vi $\mathcal{F}$ for en **modmodel** (eng.: **countermodel**) af A og skriver:

$$\mathcal{F} \not\models A.$$

Definition. Lad der være givet en formel A, en variabel x og en term t. Vi skriver $A[t/x]$ for resultatet af at erstatte alle frie forekomster af x i A med t. Vi siger også at vi **substituerer** x med t i A.

Definition. Lad A være en formel, x en variabel og t en term. Vi siger at t er **fri for** x i A hvis ingen af variablene i t bliver bundne ved at substituere x med t i A.

2.3 Opfyldelighed, gyldighed, logisk konsekvens og logisk ækvivalens

Definition. En lukket formel A kaldes **opfyldelig** hvis den er sand i mindst én fortolkning.

En lukket formel A kaldes **gyldig** hvis den er sand i enhver fortolkning. Vi skriver da ofte:

$$\models A.$$

En metode til at vise opfyldelighed af en lukket formel: Find en konkret fortolkning som gør den sand.

En metode til at vise gyldighed af en lukket formel: Vise at den er sand i enhver fortolkning.

Strategi til at bevise at en formel A holder i **enhver** fortolkning: Lad $\mathcal{F}$ betegne en **vilkårlig** fortolkning. Vis at A holder i denne fortolkning. Hvis dette lykkes, har vi vist at A holder i en **vilkårlig** fortolkning, og dermed i **enhver** fortolkning.

For at vise at en formel A **ikke er gyldig**, er det nok at finde en **modmodel** af A.

Definition. Lad $A_1, \ldots, A_n, B$ være lukkede formler i prædikatlogik. Vi siger at B er en **logisk konsekvens** af $A_1, \ldots, A_n$ hvis alle fortolkninger som gør $A_1, \ldots, A_n$ sande også gør B sand.

Ækvivalent formulering. For enhver fortolkning $\mathcal{F}$ gælder:

$$\mathcal{F} \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \text{ medfører } \mathcal{F} \models B.$$

Når B er en logisk konsekvens af $A_1, \ldots, A_n$ skriver vi

$$A_1, \ldots, A_n \models B.$$

Bemærk: Samme notation som i udsagnslogik.

Lemma. For alle lukkede formler $A_1, \ldots, A_n, B$ i prædikatlogik gælder:

$$A_1, \ldots, A_n \models B \text{ hvis og kun hvis } \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B.$$

Metoder til at bevise om en logisk konsekvens $A_1, \ldots, A_n \models B$ holder:

- **Bevise at den holder**: Lad $\mathcal{F}$ betegne en vilkårlig fortolkning for hvilken der gælder $\mathcal{F} \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. **Vis så** at der også må gælde $\mathcal{F} \models B$.
- **Bevise at den ikke holder**: Find en **modmodel**, dvs. en fortolkning $\mathcal{F}$, så der gælder $\mathcal{F} \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ men $\mathcal{F} \not\models B$.

Definition. To lukkede formler A og B i prædikatlogik kaldes **logisk ækvivalente** hvis de er sande i de samme fortolkninger.

Ækvivalent formulering. For enhver fortolkning $\mathcal{F}$ gælder:

$$\mathcal{F} \models A \text{ hvis og kun hvis } \mathcal{F} \models B.$$

Når A og B er logisk ækvivalente skriver vi

$$A \equiv B.$$

Bemærk: Samme notation som i udsagnslogik.

Lemma 1. For alle lukkede formler A og B i prædikatlogik gælder:

$$A \equiv B \text{ hvis og kun hvis } \models A \leftrightarrow B.$$

Lemma 2. For alle lukkede formler A og B i prædikatlogik gælder:

$$A \equiv B \text{ hvis og kun hvis } A \models B \text{ og } B \models A.$$

Metoder til at bevise om en logisk ækvivalens $A \equiv B$ holder:

- **Bevise at den holder**: Vise at der gælder både $A \models B$ og $B \models A$ (jvf. Lemma 2 på foregående slide).
- **Bevise at den ikke holder**: Find en **modmodel**, dvs. en fortolkning $\mathcal{F}$, så A er sand og B falsk i $\mathcal{F}$, eller omvendt.

Lemma.

- Lad A være en lukket formel hvori x forekommer bundet.
- Lad y betegne en variabel som slet ikke optræder i A.
- Lad B betegne resultatet af at erstatte alle forekomster af x indenfor virkefeltet af en kvantor $\exists x$ eller $\forall x$ med y.

Da gælder:

$$A \equiv B.$$

Nogle vigtige logiske ækvivalenser:

1.	$\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$	
2.	$\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$	
3.	$\exists x A \equiv \neg\forall x \neg A$	Elimination af $\exists$
4.	$\forall x A \equiv \neg\exists x \neg A$	Elimination af $\forall$
5.	$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$	Ombytning af to $\forall$-kvantorer
6.	$\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$	Ombytning af to $\exists$-kvantorer
7.	$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B$	Distribution af $\forall$ over $\wedge$
8.	$\exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B$	Distribution af $\exists$ over $\vee$

2.4 Tableau-metoden for prædikatlogik

negation

F-regel	T-regel
$\neg A : \mathtt{F}$ $\mid$ $A : \mathtt{T}$	$\neg A : \mathtt{T}$ $\mid$ $A : \mathtt{F}$

disjunktion

F-regel	T-regel
$A \vee B : \mathtt{F}$ $\mid$ $A : \mathtt{F}$ $\mid$ $B : \mathtt{F}$	$A \vee B : \mathtt{T}$ $A : \mathtt{T}$ $\qquad$ $B : \mathtt{T}$

konjunktion

F-regel	T-regel
$A \wedge B : \mathtt{F}$ $A : \mathtt{F}$ $\qquad$ $B : \mathtt{F}$	$A \wedge B : \mathtt{T}$ $\mid$ $A : \mathtt{T}$ $\mid$ $B : \mathtt{T}$

implikation

F-regel	T-regel
$A \to B : \mathtt{F}$ $\mid$ $A : \mathtt{T}$ $\mid$ $B : \mathtt{F}$	$A \to B : \mathtt{T}$ $A : \mathtt{F}$ $\qquad$ $B : \mathtt{T}$

biimplikation

F-regel	T-regel
$A \leftrightarrow B : \mathtt{F}$ $A : \mathtt{T}$ $\qquad$ $A : \mathtt{F}$ $\mid$ $\qquad\qquad$ $\mid$ $B : \mathtt{F}$ $\qquad$ $B : \mathtt{T}$	$A \leftrightarrow B : \mathtt{T}$ $A : \mathtt{T}$ $\qquad$ $A : \mathtt{F}$ $\mid$ $\qquad\qquad$ $\mid$ $B : \mathtt{T}$ $\qquad$ $B : \mathtt{F}$

alkvantor

F-regel	T-regel
$\forall x A : \mathtt{F}$ $\mid$ $A[c/x] : \mathtt{F}$ hvor c er et **nyt** konstantsymbol som ikke optræder andre steder på grenen.	$\forall x A : \mathtt{T}$ $\mid$ $A[t/x] : \mathtt{T}$ hvor t er en term som: 1) er fri for x i A. 2) allerede optræder på grenen.

eksistenskvantor	F-regel	T-regel
	$\exists x A : \texttt{F}$ $\mid$ $A[t/x] : \texttt{F}$	$\exists x A : \texttt{T}$ $\mid$ $A[c/x] : \texttt{T}$
	hvor t er en term som: 1) er fri for x i A. 2) allerede optræder på grenen.	hvor c er et **nyt** konstantsymbol som ikke optræder andre steder på grenen.

Vi har de samme begreber som for udsagnslogiske tableauer:

- **Lukket gren** (eng.: **closed branch**): En gren som indeholder både $A : \texttt{F}$ og $A : \texttt{T}$ for en formel A. Lukkede grene markeres med kryds ($\times$) og der anvendes ikke yderligere regler på dem.
- **Åben gren** (eng.: **open branch**): En gren som ikke er lukket.
- **Mættet gren** (eng.: **saturated branch**): En gren hvor alle regler som **kan** anvendes **er** blevet anvendt (alle ikke-atomare formler på grenen er markeret med $\checkmark$). Hvis en gren er både åben og mættet, markeres den med en cirkel ($\bigcirc$).

Markering af en formel $\forall x A : \texttt{F}$ eller $\exists x A : \texttt{T}$ med $\checkmark$. Så snart en regel er blevet anvendt på den (som med $\neg A$, $A \wedge B$, osv.).

Markering af en formel $\forall x A : \texttt{T}$ eller $\exists x A : \texttt{F}$ med $\checkmark$. Først når:

1. Alle formler af typen $\forall x A : \texttt{F}$ og $\exists x A : \texttt{T}$ er allerede markeret med flueben.
2. Der kan ikke anvendes flere dekompositionsregler på formlen, dvs. alle termer på grenen som **kan** substitueres ind på x's plads er allerede blevet det.

Algoritme for at afgøre gyldighed af en formel A via tableau-metoden:

1. Start med rodformlen $A : \texttt{F}$.
2. Anvend dekompositionsreglerne gentagne gange indtil en af følgende er opfyldt:
   - Der findes en åben, satureret gren ($\bigcirc$).
   - Alle grene er lukket ($\times$).
3. Hvis alle grene er lukket er formlen A gyldig. Ellers er den ikke gyldig.

Som i udsagnslogik har vi også i prædikatlogik at vi kan afgøre logisk konsekvens og logisk ækvivalens via tableauer:

- *Problem*: Er B en **logisk konsekvens** af $A_1, \ldots, A_n$?

  Ækvivalent problem: Er formlen $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ **gyldig**?
- *Problem*: Er A og B **logisk ækvivalente**?

  Ækvivalent problem: Er formlen $A \leftrightarrow B$ **gyldig**?

3 Mængder og relationer

Mængde: En samling af objekter.

Elementer: Objekterne indeholdt i en mængde kaldes dens **elementer**.

Den tomme mængde: Mængden uden elementer, betegnet $\emptyset$.

- $x \in A$ betyder: x er element i mængden A.
- $x \notin A$ betyder: x er ikke element i A.

Definition. En mængde A kaldes en **delmængde** af en mængde B hvis ethvert element i A også er element i B.

Når A er en delmængde af B skriver vi $A \subseteq B$.

Udtrykket $A \subseteq B$ kaldes en **mængdeinklusion**.

Definition. To mængder A og B er **identiske** hvis de har de samme elementer.

Når A og B er identiske skriver vi $A = B$.

Udtrykket $A = B$ kaldes en **mængde-lighed**.

Sætning. For alle mængder A og B gælder $A = B$ hvis og kun hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Tuborg-notation. At definere en mængde ved et udtryk på følgende form:

$$A = \{x \mid \ldots x \ldots\}.$$

Udtrykket til højre for den lodrette streg er et **prædikat**, som fortæller hvilke egenskaber x skal have for at være med i mængden.

Definition. Lad A og B betegne mængder.

- **Foreningsmængden** af A og B, betegnet $A \cup B$ er defineret ved:
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$
- **Fællesmængden** af A og B, betegnet $A \cap B$, er defineret ved:
$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}.$$
- **Mængdedifferensen** mellem A og B, betegnet $A - B$ eller $A \backslash B$, er defineret ved:
$$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}.$$

En metode til at vise $M \subseteq N$ for et par af mængder M, N:

1. **Antag** $x \in M$ (vi vælger et **vilkårligt** x som opfylder $x \in M$).
2. Vis at så må også gælde $x \in N$.

En metode til at vise $M = N$ for et par af mængder M, N:

1. Vis $M \subseteq N$.
2. Vis $N \subseteq M$.

Sætning. Lad M og N være mængdeudtryk benyttende $\cup$, $\cap$ og $-$. Lad $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ være oversættelserne af hhv. M og N til udsagnslogiske formler.

Da gælder $M = N$ hvis og kun hvis $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$.

To forskellige metoder til at vise ligheden mellem to mængdeudtryk M og N:

1. Giv et rent sprogligt bevis for hver af påstandene $M \subseteq N$ og $N \subseteq N$.
2. Oversæt M og N til udsagnslogiske formler $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ og vis $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ (ved brug af tableau-metoden, sandhedstabel eller omskrivning gennem logiske ækvivalenser).

Som alternativ til endelige mængder har vi **tupler**: Udtryk på formen $(a_1, \ldots, a_n)$.

Udtrykket $(a_1, \ldots, a_n)$ kaldes en n**-tuppel** (et **par** hvis $n = 2$).

Definition. Lad A og B være mængder. Da er **krydsproduktet** af A og B følgende mængde af par:

$$\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Denne mængde betegnes med $A \times B$.

Definition. Lad $A_1, \ldots, A_n$ betegne mængder. Da er **krydsproduktet** af $A_1, \ldots, A_n$ følgende mængde:

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Denne mængde betegnes med $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Definition. Lad n være et heltal større end 0. Ved en n**-ær relation** forstås en mængde af n-tupler.

Antag R er en relation og $A_1, \ldots, A_n$ er mængder således at:

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Da siges R at være en relation **på** $A_1, \ldots, A_n$.